Helsingin Yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen osasto

Maisterintutkielma

Suora, kolmio ja ympyrä tasogeometriassa

Ersha Hao

Ohjaaja: Anne-Maria Ernvall-Hytönen

5. toukokuuta 2021

HELSINGIN YLIOPISTO
HELSINGFORS UNIVERSITET
UNIVERSITY OF HELSINKI

MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA
MATEMATISK-NATURVETENSKAPLIGA FAKULTETEN
FACULTY OF SCIENCE

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan, fysiikan ja kemian opettajan maisteriohjelma

Opintosuunta – Studieinrikting – Study track

Matematiikan opettaja

Tekijä – Författare – Author

Hao, Ersha

Työn nimi – Arbetets titel – Title

Suora, kolmio ja ympyrä tasogeometriassa

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Maisterintutkielma	Toukokuu 2021	78

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Olen hyvin kiinnostunut tasogeometristen tehtävien todistamisesta, ja luulen, että se on erittäin tärkeää opiskelijoiden loogisen ajattelukyvyn kasvattamiseksi. Maisterintutkielmani tarkoituksena on esitellä joitain tasogeometrisia lauseita, jotka ovat mielestäni erittäin mielenkiintoisia ja hyödyllisiä. Nämä lauseet eivät sisälly lukion oppikirjoihin, mutta vaikeuden ja soveltamisen näkökulmasta ne sopivat hyvin lukiolaisille, jotka haluavat oppia enemmän tasogeometriasta. Se sopii myös lukion matematiikan opettajille ja tietysti niille, jotka ovat kiinnostuneita tasogeometriasta.

Haluaisin samalla näyttää lukijoille myös tasogeometrian ongelmien ratkaisutaitoni ja kokemukseni. Tässä prosessissa keskityn ongelmien ajatteluprosessiin, toisin sanoen siihen, kuinka löytää hyödyllistä tietoa, kuinka valita vastaava tai sopiva lause tai kaava ongelman ratkaisemiseksi. Nämä ajatteluprosessit ovat arvokkain osa maisterintutkielmaani.

Tärkeimmät maisterintutkielmassani esitetyt lauseet ovat Menelaoksen lause, Cevan lause, Perhoslause ja Morleyn lause. Lisäksi myös näiden lauseiden lemmat ja sovellukset. Valitsin näihin liittyen tyypillisiä, hieman vaikeampia tehtäviä. Todistukset koostuvat vain lukion tasogeometrian tiedoista.

Tiedämme, että monilla tehtävillä voi olla useita ratkaisuja. Kun voimme analysoida ja käsitellä ongelmia useista näkökulmista, kokemuksemme kasvaa edelleen, ja ongelmien käsittely on entistä helpompaa. Toivon, että lukijat voivat löytää hyödyllistä tietoa tai kokemuksia maisterintutkielmastani.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords

Geometria, Perhoslause, Menelaoksen lause, Cevan lause, Morleyn lause.

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Helsingin yliopisto, Kumpulan tiedekirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällys

Johdanto

Olen erittäin kiinnostunut geometriasta. Lukion geometria vaikuttaa yksinkertaiselta ja helposti ymmärrettävältä. Oppikirjojen tehtävät ovat myös suhteellisen helppoja, mutta tosiasiassa näillä yksinkertaisilla geometrisilla lauseilla tai kaavoilla voidaan ratkaista monia erittäin monimutkaisia tehtäviä. Lisäksi vaikka nämä lauseet ja kaavat näyttävät olevan hyvin yksinkertaisia, on soveltavissa tehtävissä vaikea tietää mikä lause tai kaava pitää valita. Tämä on suuri, ja monien mielestä vaikea, ongelma. Olen kohdannut joitain erittäin mielenkiintoisia tehtäviä omissa geometrian opinnoissani. Opintojeni pohjalta haluaisin esitellä tutkielmassa olevat tehtävät, jotka vastaavat lukion geometriakurssin painopisteitä, sekä tarjota lukijoille lisää ideoita ja menetelmiä geometristen ongelmien ratkaisemiseksi. Tämä on minun alkuperäinen ajatukseni ja tarkoitukseni.

Suomalaisen lukion geometriakurssit sisältävät tasogeometriaa ja avaruusgeometriaa. Graduni päätutkimus käsittelee tasogeometriaa, erityisesti suoraa, kolmiota, ympyrää ja niiden suhteita toisiinsa, ja tämän lisäksi trigonometriaa. Tavoitteenani on antaa lukijoille yleinen käsitys geometrian kurssien sisällöstä. Ensimmäisessä luvussa esitellään geometrian kurssin osuutta lukion opintosuunnitelmassa ja kurssin keskeistä sisältöä.

Toisessa luvussa tarkastellaan lyhyesti joitain suoran, kolmion ja ympyrän ominaisuuksia ja lauseita. Nämä ovat pohjana sille, että niiden välisiä suhteita ymmärretään syvemmin. Esimerkkinä tästä on *Pythagoraan* ja *kosinilauseen* todistus. Toisaalta nämä todistukset auttavat lukijaa syventämään näiden lauseiden ymmärtämistä, ja niiden käyttö on perusteltua myöhemmissä luvuissa.

Kolmannessa ja neljännessä luvussa esitellään syvällisempää teoriaa liittyen suoriin, kolmioihin ja ympyröihin. Tämä tehdään tutkimalla ja todistamalla joitain lauseita ja tehtäviä. Kolmannessa luvussa esitellään *Menelaoksen lause* ja *Cevan lause.* Neljännessä luvussa esitellään *Perhoslause.* Valitsin näihin liittyen tyypillisiä, hieman vaikeampia tehtäviä. Joissakin näissä tehtävissä täytyy käyttää vain yhtä tai kahta lausetta, ja toisaalta jotkut tehtävät vaativat monenlaisen tiedon kattavaa pohtimista. Näiden tehtävien ratkaisut eivät tietenkään ole ainutlaatuisia. On siis oltava myös muita ratkaisuja, jotka on varattu kiinnostuneille lukijoille itsenäistä pohdiskelua varten.

Viidennessä luvussa esitellään kuuluisa *Morleyn lause*. Lause voidaan todistaa monella tavalla, mutta se todistetaan tutkielmassani vain lukion geometriatiedolla. Tutkielmassani on tästä kaksi todistusta: yksi käyttää pääasiassa kehäkulmalausetta ja toinen sinilausetta.

Geometria on minusta erittäin mielenkiintoinen aihe. Toivonkin, että tämä tutkielma auttaa lukijoita ratkaisemaan joitain tasogeometriassa havaittuja ongelmia.

Haluan kiittää ohjaajaani apulaisprofessori Anne-Maria Ernvall-Hytöstä ja muita matematiikan ja tilastotieteen osaston ystäviä tuesta ja avusta. Graduni kirjoittamisen aikana he antoivat minulle paljon hyviä ehdotuksia ja teknistä tukea. Ilman heidän apuaan graduni ei olisi voinut valmistua näin sujuvasti.

1 Lukion Geometrian oppimäärä

1.1 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2019

Tutustutaan ensin lukion uuteen opetussuunnitelmaan [1], jossa keskeisena erona on laaja-alaisuuden korostaminen, sekä kurssien vaihtuminen moduuleihin ja opintojaksoihin. Seuraavissa taulukoissa esitetään sekä lyhyen että pitkän matematiikan opintovaatimukset.

Nuorille sekä aikuisille tarkoitettuun lukiokoulutuksen oppimäärään sisältyvät opinnot		
Oppiaineryhmä ja oppiaine	Pakolliset opinnot opintopisteinä	Opiskelijoille tarjottavien valtakunnallisten valinnaisten opintojen määrä opintopisteinä
Matematiikan yhteiset opinnot	2	
Matematiikan lyhyt oppimäärä	10	4
Matematiikan pitkä oppimäärä	18	6

1.2 Matematiikan lyhyt oppimäärä

Lyhyessä oppimäärässä geometriaa on yksi 2 opintopisteen kurssi. Se kuuluu pakollisiin opintoihin.

MAB3 Geometria (2 op)

Tavoitteet: Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

(1) Harjaantuu tekemään havaintoja ja päätelmiä kuvioiden ja kappaleiden geometrisista ominaisuuksista.

(2) Vahvistaa tasokuvioiden ja kolmiulotteisten kappaleiden kuvien piirtämisen taitojaan.
(3) Osaa ratkaista käytännön ongelmia geometriaa hyväksi käyttäen.
(4) Osaa käyttää ohjelmistoja kuvioiden ja kappaleiden tutkimisessa sekä geometriaan liittyvien sovellusten yhteydessä.

Keskeiset sisällöt:

(1) Kuvioiden yhdenmuotoisuus.
(2) Suorakulmaisen kolmion trigonometria.
(3) Pythagoraan lause ja Pythagoraan lauseen käänteislause.
(4) Kuvioiden ja kappaleiden pinta-alan ja tilavuuden määrittäminen.
(5) Geometrian menetelmien käyttö tasokoordinaatistossa.

1.3 Matematiikan pitkä oppimäärä

Pitkässä oppimäärässä pakollisia geometrian kursseja on yksi 2 opintopisteen ja yksi 3 opintopisteen kurssi. Lisäksi löytyy 2 opintopisteen valinnainen valtakunnallinen kurssi MAA10 3D-geometria.

MAA3 Geometria (2 op)

Tavoitteet: Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

(1) Harjaantuu hahmottamaan ja kuvaamaan tilaa ja muotoa koskevaa tietoa sekä kaksi- että kolmiulotteisissa tilanteissa.
(2) Osaa soveltaa yhdenmuotoisuutta, Pythagoraan lausetta sekä suora- ja vinokulmaisen kolmion trigonometriaa.
(3) Harjaantuu muotoilemaan, perustelemaan ja käyttämään geometrista tietoa sisältäviä lauseita.

(4) Osaa käyttää ohjelmistoja tutkiessaan kuvioita ja kappaleita sekä niihin liittyvää geometriaa.

Keskeiset sisällöt:

(1) Kuvioiden ja kappaleiden yhdenmuotoisuus.
(2) Sini- ja kosinilause.
(3) Monikulmioihin liittyvien pituuksien, kulmien ja pinta-alojen laskeminen.
(4) Ympyrän ja sen osien ja siihen liittyvien suorien geometria.
(5) Suoraan lieriöön ja suoraan kartioon sekä palloon liittyvien pituuksien, pinta-alojen ja tilavuuksien laskeminen.

MAA4 Analyyttinen geometria ja vektorit (3 op)

Tavoitteet: Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

(1) Ymmärtää, kuinka analyyttinen geometria luo yhteyksiä geometristen ja algebrallisten käsitteiden välille.
(2) Ymmärtää yhtälön geometrisen merkityksen.
(3) Osaa ratkaista muotoa $|f(x)| = a$ tai $|f(x)| = |g(x)|$ olevia itseisarvoyhtälöitä.
(4) Ymmärtää vektorikäsitteen ja perehtyy vektorilaskennan perusteisiin.
(5) Osaa tutkia kaksiulotteisen koordinaatiston pisteitä, etäisyyksiä ja kulmia vektoreiden avulla.
(6) Osaa ratkaista tasogeometrian ongelmia vektoreiden avulla.
(7) Osaa käyttää ohjelmistoja käyrien ja vektoreiden tutkimisessa sekä niihin liittyvissä sovelluksissa.

Keskeiset sisällöt:

(1) Käyrän yhtälö.

(2) Suoran, ympyrän ja paraabelin yhtälö.

(3) Suorien yhdensuuntaisuus ja kohtisuoruus.

(4) Itseisarvoyhtälö.

(5) Pisteen etäisyys suorasta.

(6) Vektoreiden perusominaisuudet.

(7) Tason vektoreiden yhteen- ja vähennyslasku sekä tason vektorin kertominen luvulla.

(8) Tason vektoreiden pistetulo, tason vektoreiden välinen kulma.

MAA10 3D-geometria (2 op)

Tavoitteet: Moduulin tavoitteena on, että opiskelija

(1) Syventää vektorilaskennan tuntemustaan ja oppii käyttämään vektoreita kolmiulotteisessa avaruudessa.

(2) Oppii tutkimaan xyz-koordinaatiston pisteitä, suoria ja tasoja vektoreiden avulla.

(3) Vahvistaa avaruusgeometrian osaamistaan ääriarvosovellusten yhteydessä .

(4) Tutustuu kahden muuttujan funktioon.

(5) Osaa käyttää ohjelmistoja vektoreiden, suorien, tasojen ja pintojen havainnollistamisessa sekä vektorilaskennassa.

Keskeiset sisällöt:

(1) Vektoriesitys kolmiulotteisessa koordinaatistossa.

(2) Piste- ja ristitulo.

(3) Piste, suora ja taso avaruudessa.

(4) Kulma avaruudessa.

(5) Yhden muuttujan differentiaali- ja integraalilaskennan sovelluksia avaruusgeometriassa.

(6) Kahden muuttujan funktio ja pinta avaruudessa.

Yllä olevan opetussuunnitelman lainauksen pohjalta voidaan havaita, että sekä lyhyessä ja pitkässä matematiikassa suora, kolmio ja ympyrä ovat hyvin perus- mutta myös tosi tärkeää sisältöä. Seuraavaksi esitän ne yksityiskohtaisesti.

2 Suoran, kolmion ja ympyrän peruskäsitteitä

Tässä luvussa esitellään suoran, kolmion ja ympyrän perusominaisuuksia ja joitain lauseita lukion tasogeometriassa. Vaikka nämä ominaisuudet ja lauseet ovat hyvin yksinkertaisia, ne ovat tasogeometrian perustietoa. Pitää muistaa ne todella tarkasti, jotta niitä voidaan käyttää taitavasti ongelmien ratkaisuprosessissa. Tämä on myös edellytys geometrian syvällisempään oppimiseen.

2.1 Suora

Kahden pisteen kautta voidaan piirtää vain yksi suora. Suoran pituutta ei voida mitata, koska se jatkuu molempiin suuntiin loputtomasti. Jana on kahden pisteen välisen suoran osa.

Lyhin etäisyys kahden pisteen välillä on näiden pisteiden välinen jana. Kaikki tietävät tämän, mutta harvat opiskelijat käyttävät tätä tietoa. Ei siksi, että tämä lause olisi liian yksinkertainen, vaan siksi, että he ajattelevat joskus ongelmaa liian monimutkaisena. Esimerkiksi:

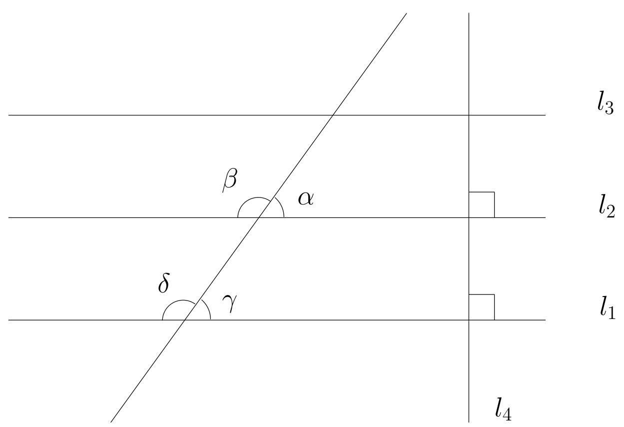
Tehtävä 1: Oletetaan kuvan 1 mukaisesti, että jokea rajaavat suorat l_1 ja l_2. Pisteessä A oleva ihminen hakee vettä joesta ja vie veden pisteeseen B. Mikä on tässä lyhin reitti? (Vastaus löytyy liitteestä A.1.)

Kuva 1: Mikä on tässä lyhin reitti? (l_1 ja l_2 ovat joenrantoja.)

Tasogeometriassa suora ja suoran suhde on hyvin yksinkertainen: ne ovat joko yhdensuuntaisia tai leikkaavat toisensa. Suorat ovat yhdensuuntaiset, jos kulmakertoimet ovat samat, tai jos molemmat suorat ovat y-akselin suuntaiset. Lisäksi ne ovat yhdensuuntaisia esimerkiksi, jos jokin alla olevista ehdoista täyttyy, kuten kuvasta 2 nähdään:

(1) Jos $\alpha = \gamma$ tai $\beta = \delta$, niin $l_1 \mathbin{//} l_2$; (2) Jos $\alpha + \delta = \pi$ tai $\beta + \gamma = \pi$, niin $l_1 \mathbin{//} l_2$;

(3) Jos $l_1 \mathbin{//} l_2$ ja $l_2 \mathbin{//} l_3$, niin $l_1 \mathbin{//} l_3$; (4) Jos $l_1 \perp l_4$ ja $l_2 \perp l_4$, niin $l_1 \mathbin{//} l_2$.



Kuva 2

Joidenkin erikoismuotojen vastakkaiset sivut ovat myös yhdensuuntaiset toistensa kanssa.

Esimerkkinä tästä ovat suunnikas, säännöllinen kuusikulmio ja niin edelleen.

Tasogeometriassa jos kaksi suoraa eivät ole yhdensuuntaiset, ne leikkaavat toisensa. Tehtävissä useimmiten suorien leikkaustapa on kohtisuora leikkaus. Suorat ovat kohtisuorat, jos kulmakerrointen tulo on -1, tai suorat ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

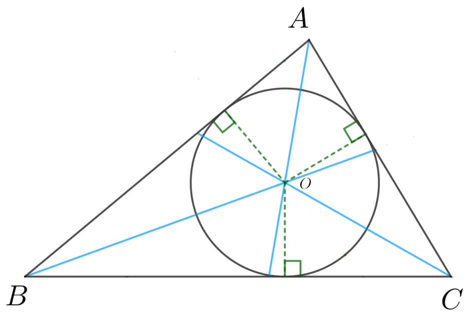
2.2 Kolmio

Kolmio on ainoa monikulmio, joka aina määrittää avaruudessa tason. Kaikissa kolmioissa kulmien summa on 180 astetta.

2.2.1 Kolmion merkilliset pisteet

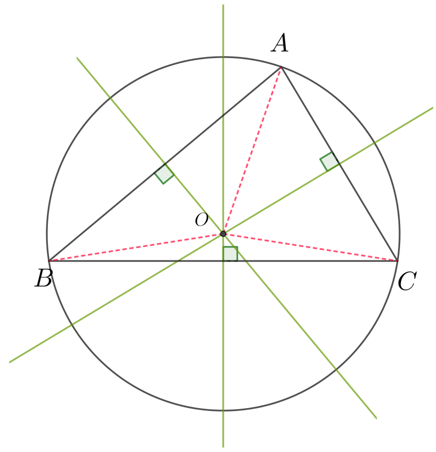
Kolmioilla on joitakin merkillisiä pisteitä, ja näiden pisteiden ominaisuuksien tunteminen on suuri apu kolmioon liittyvien tehtävien ratkaisemisessa. Yleisimmät merkilliset pisteet on esitetty seuraavaksi.

(1) Kolmion kulmanpuolittajat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tämä piste on myös kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste. Etäisyys tästä pisteestä kolmion jokaiselle sivulle on sama. Kuvassa 3 piste O on kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste.



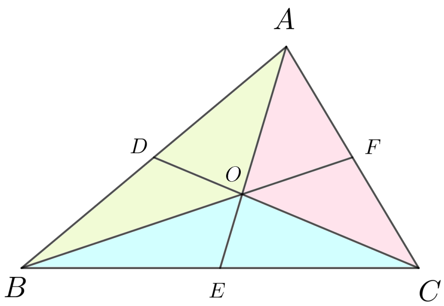
Kuva 3

(2) Kolmion sivujen keskinormaalit leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tämä piste on myös kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Etäisyys tästä pisteestä kolmion jokaiseen kärkeen on sama. Kuvassa 4 nähdään, että $OA = OB = OC$, missä piste O on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste.



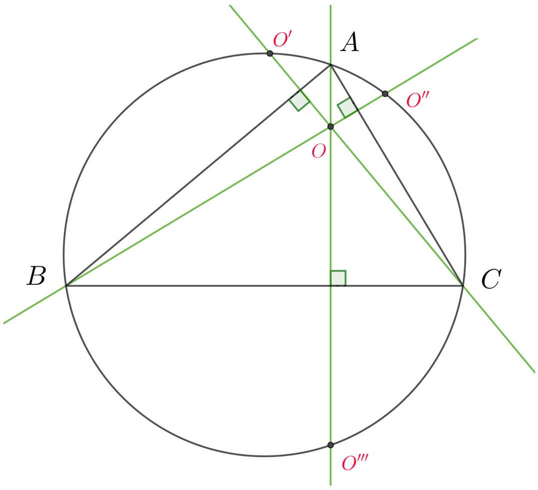
Kuva 4

(3) Kolmion mediaanit leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tämä piste on myös kolmion painopiste. Painopiste jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 1/2 kolmion kärjestä lukien. Kuten kuvassa 5 nähdään: $\dfrac{OD}{OC} = \dfrac{OE}{OA} = \dfrac{OF}{OB} = \dfrac{1}{2}$. Lisäksi kolmioden $\triangle AOB$, $\triangle BOC$ ja $\triangle AOC$ pinta-alat ovat samat.



Kuva 5

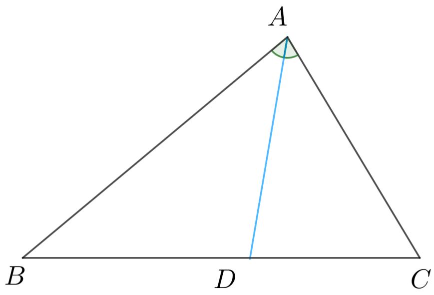
(4) Kolmion kärkien ja vastakkaisten sivujen tai niiden jatkeiden väliset korkeusjanat leikkaavat toisensa samassa pisteessä. Tätä pistettä kutsutaan myös ortokeskukseksi. Kolmion ortokeskuksen symmetria-pisteet kolmion kunkin kolmen sivun suhteen sijaitsevat ulkoympyrän kehällä. Kuvassa 6 nähdään, että piste O on kolmion ortokeskus. Sen symmetria-piste O' sijaitsee sivun AB suhteen ulkoympyrän kehällä. Pisteet O'' ja O''' ovat pisteen O symmetria-pisteet sivujen AC ja BC suhteen.



Kuva 6

2.2.2 Kolmioon liittyviä lauseita

Lause 1. *(Kolmion kulmanpuolittajalause) : Jana, joka puolittaa kolmion kulman, jakaa kulmaa vastapäätä olevan sivun samassa suhteessa kuin on kulman kylkien pituuksien suhde (Kuva 7).*

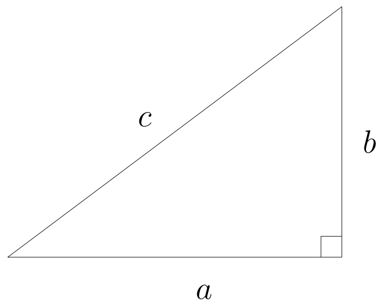


Kuva 7: $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{AB}{AC}$.

Todistus. Todistus löytyy artikkelista *Apollonioksen unohtunut ympyrä*, Matti Lehtinen, Solmu 3/2010 [7].

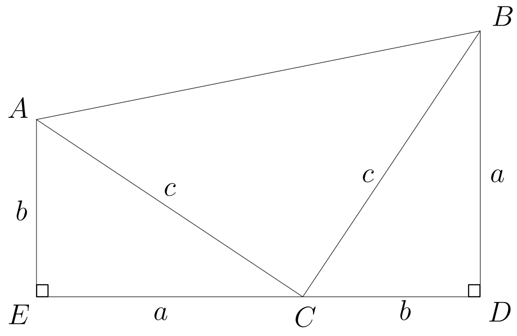
□

Lause 2. *(Pythagoraan lause) Suorakulmaisen kolmion kateettien neliöiden summa on hypotenuusan neliö (Kuva 8).*



Kuva 8: $a^2 + b^2 = c^2$.

Historiassa monet ihmiset ovat yrittäneet käyttää erilaisia menetelmiä todistaakseen sen. Esimerkkinä tästä on Yhdysvaltojen 20. presidentti James Abram Garfield (19. marraskuuta 1831 – 19. syyskuuta 1881)[1], jonka tekemä todistus Pythagoraan lauseelle on esitetty seuraavaksi.



Kuva 9: James Abram Garfieldin todistus.

Todistus. Olkoon suorakulmainen puolisuunnikas $ABDE$ (kuva 9). Puolisuunnikkaassa

(1) $\triangle AEC \cong \triangle CDB$,

(2) $\angle CEA = \angle BDC = \dfrac{\pi}{2}$,

(3) $AE = CD = b$,

(4) $CE = BD = a$, ja

(5) $AC = CB = c$.

[1] Mathematical Treasure: James A. Garfield's Proof of the Pythagorean Theorem. Sid J. Kolpas (Delaware County Community College). Mathematical Association of America.

Merkitään $S_{\triangle AEC}$ kolmion $\triangle AEC$ pinta-ala. Tällöin

$$S_{\triangle AEC} = S_{\triangle CDB} = \frac{ab}{2},$$
$$S_{\triangle BAC} = \frac{c^2}{2},$$
$$S_{ABDE} = \frac{(BD + AE) \cdot DE}{2} = \frac{(a+b)(a+b)}{2}.$$

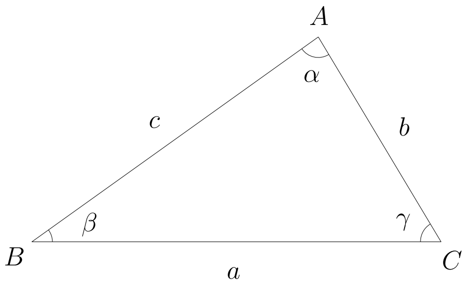
Koska $S_{ABDE} = S_{\triangle AEC} + S_{\triangle CDB} + S_{\triangle BAC}$, jolloin

$$\frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2}$$
$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{2} = \frac{2ab + c^2}{2}$$
$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$
$$a^2 + b^2 = c^2.$$

$\square$

Lukion tasogeometriassa kolmioita opiskeltaessa monille opiskelijoille trigonometria on vaikeinta. Trigonometriaan liittyy monia lauseita ja kaavoja. Tässä esitän vain kaksi erittäin tärkeää peruslausetta, jotka ovat *sinilause* ja *kosinilause*. Monissa sovelluksissa joudutaan määrittämään kolmion sivujen pituudet tai kulmien suuruudet, kun joitakin tietoja kolmiosta on käytettävissä. Esimerkiksi jos tunnetaan kaksi kolmion kulmaa ja näiden välisen sivun pituus, niin tällöin on määritettävä kolmion muut sivut. Yleensä tässä tapauksessa voidaan käyttää näitä kahta lausetta ongelman ratkaisemiseksi.

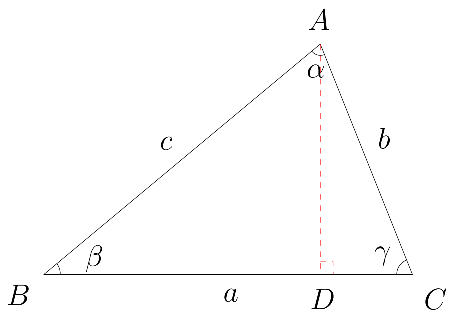
Lause 3. *(Sinilause) Kolmion sivun ja vastaisen kulman sinin suhde on aina sama (Kuva 10).*



Kuva 10: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$.

Sinilause voidaan todistaa monella tavalla. Yksinkertaista on käyttää kolmion pinta-alaa sen todistamiseen.

Todistus. Olkoon mielivaltainen kolmio $\triangle ABC$, ja jana AD on sen korkeus. Lisäksi kulmat $\angle BAC = \alpha$, $\angle CBA = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. (Kuvassa 11 kolmio on teräväkulmainen kolmio, mutta sama pätee suorakulmaisiin ja tylppäkulmaisiin kolmioihin, koska kolmion pinta-ala on kanta kertaa korkeus jaettuna kahdella.)



Kuva 11

Kuvasta 11 nähdään, että korkeus $AD = b \cdot \sin\gamma$, tällöin kolmion pinta-ala on

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AD = \frac{ab\sin\gamma}{2}.$$

Samalla periaatteella saadaan $\dfrac{bc\sin\alpha}{2}$ ja $\dfrac{ac\sin\beta}{2}$. Siis

$$S_{\triangle ABC} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2}.$$

Koska $abc \neq 0$ ja myös $S_{\triangle ABC} \neq 0$, joten

$$\frac{abc}{2 \cdot S_{\triangle ABC}} = \frac{abc}{bc\sin\alpha} = \frac{abc}{ac\sin\beta} = \frac{abc}{ab\sin\gamma}.$$

Saadaan

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

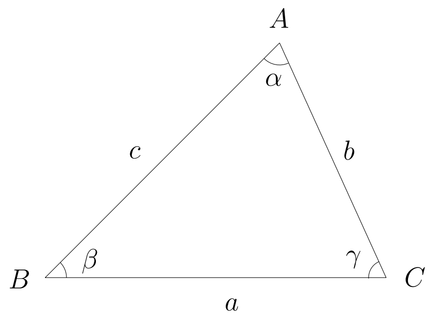
□

Korollaari 1. *Jos kolmion $\triangle ABC$ kulmat ovat α, β ja γ, niiden vastaavat sivut ovat a, b ja c, ja kolmion ympäri piirretyn ympyrän säde on r, on voimassa*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r.$$

Todistus. Kiinnostuneet lukijat voivat yrittää todistaa tämän korollaarin itse. Joissakin kirjoissa tai artikkeleissa tätä korollaaria kutsutaan myös sinilauseeksi, esimerkiksi: *Geometrian perusteita*, Matti Lehtinen, 2016. Lauseen todistus löytyy myös tästä kirjasta sivulta 42 [6]. □

Lause 4. *(Kosinilause) Kolmion $\triangle ABC$ kulmat ovat α, β ja γ, sekä niitä vastaavat sivut ovat a, b ja c. Tällöin kolmiossa pätee $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ (Kuva 12).*

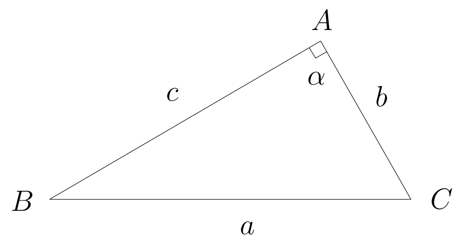


Kuva 12: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Myös kosinilause voidaan todistaa monella tavalla. Tässä esitetään vain yksi yksinkertainen todistus.

Todistus. Koska kulma voi olla terävä kulma, suorakulma tai tylppä kulma, joten tarkastelu jakautuu kolmeen osaan.

1. α on suorakulma (Kuva 13): Tällöin Pythagoraan lauseen mukaan

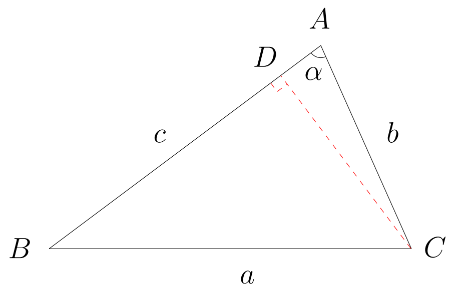


Kuva: 13

$$a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + c^2 - 0 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\frac{\pi}{2} = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Täten väite pätee.

2. α on terävä kulma (Kuva 14): Piirretään sivua AB kohtisuora jana pisteen C kautta, joka leikkaa sivun AB pisteissä D. (Huom: Kulma B voi olla terävä, suora tai tylppä, mutta piste D on kuitenkin suoralla AB.)



Kuva: 14

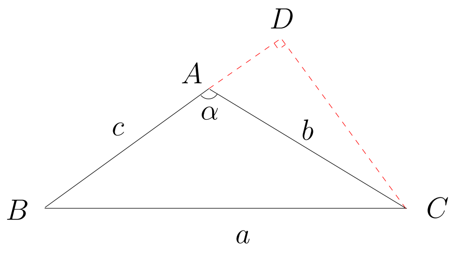
Tällöin suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle ADC$ pätee $AD = b\cos\alpha$ ja $CD = b\sin\alpha$, jolloin saadaan $BD = |AB - AD| = |c - b\cos\alpha|$.

Suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle DBC$ Pythagoraan lauseen mukaan

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + CD^2 \\ &= |c - b\cos\alpha|^2 + (b\sin\alpha)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2 A \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2. \end{aligned}$$

Koska $BC = a$, täten saadaan $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

3. α on tylppä kulma (Kuva 15): Piirretään sivulle AB kohtisuora jana pisteen C kautta, joka leikkaa sivun AB jatkeen pisteessä D.



Kuva 15

Tällöin suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle DAC$ pätee $AD = b\cos(\pi - \alpha) = -b\cos\alpha$ ja $CD = b\sin(\pi - \alpha) = b\sin\alpha$, jolloin saadaan $BD = AB + AD = c - b\cos\alpha$.

Suorakulmaisessa kolmiossa $\triangle DBC$ Pythagoraan lauseen mukaan

$$\begin{aligned}
BC^2 &= BD^2 + CD^2 \\
&= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 \\
&= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha \\
&= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2.
\end{aligned}$$

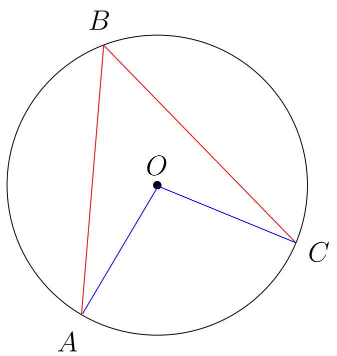
Eli $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

Tällöin kohtien (1), (2) ja (3) perusteella voidaan todeta, että kolmiossa pätee $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. $\square$

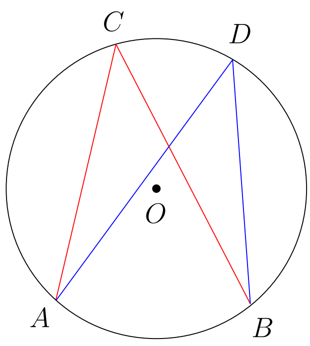
Sini- ja kosinilauseen lisäksi on vielä monia yleisiä trigonometriaa koskevia lauseita ja kaavoja. Liitteessä A.3 luetellaan lukion oppimäärään kuuluvia kaavoja, joita myöhemmin käytetään todistuksissa.

2.3 Ympyrä

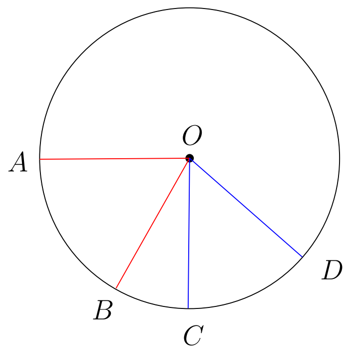
Kolme pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla, määrittävät ympyrän. Ympyrä on suoran suhteen symmetrinen, ja sen symmetria-akseli on mikä tahansa suora, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta. Ympyrä on myös pisteen suhteen symmetrinen, ja sen symmetriakeskus on ympyrän keskipiste. Tärkeitä lauseita ympyröitä koskien ovat *Kehäkulmalause* ja *Pisteen potenssin lause*.



Kuva 16



kuva 17



kuva 18

Lause 5. *(Kehäkulmalause) Kehäkulman suuruus $\angle ABC$ on puolet samaa kaarta vastaavan keskuskulman $\angle AOC$ suuruudesta: $\angle ABC = \dfrac{\angle AOC}{2}$ (Kuva 16).*

Todistus. Todistus löytyy kirjasta *Geometria*, K.Väisälä, 1959 sivulta 84. [5]. □

Lause 6. *Samaa kaarta vastaavat ympyrän kehäkulmat ovat yhtä suuret.*

Kuvasta 17 nähdään, että kaarta $\overset{\frown}{AB}$ vastaaville kehäkulmille ACB ja ADB pätee $\angle ACB = \angle ADB$.

Todistus. Todistus löytyy kirjasta *Geometria*, K.Väisälä, 1959 sivulta 85 Seur.2 [5]. □

Lause 7. *Samaa kaarta vastaavat ympyrän keskuskulmat ovat yhtä suuret.*

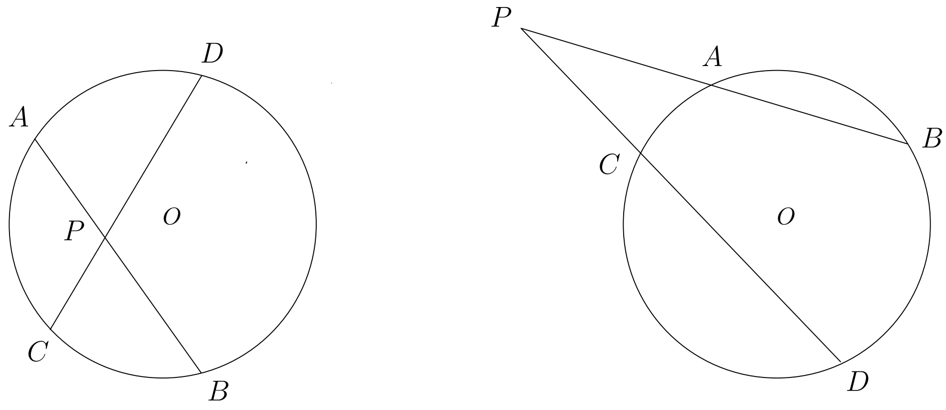
Kuvan 18 mukaisesti yhtäsuuruus $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ on ekvivalentti yhtäsuuruuden $\angle AOB = \angle COD$ kanssa.

Todistus. Todistus löytyy kirjasta *Geometria*, K.Väisälä, 1959 sivulta 12. [5]. $\square$

Lause 8. *(Pisteen potenssin lause) Olkoon P annettu piste. Asetetaan pisteen P kautta kaksi ympyrän sekanttia, joista toinen leikkaa ympyrän pisteissä A ja B, ja toinen leikkaa ympyrän pisteissä C ja D. Pisteen P potenssiksi ympyrän suhteen sanotaan janojen pituuksien tuloa $PA \cdot PB$, mikä on yhtä suuri kuin $PC \cdot PD$, eli*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Piste P voi olla ympyrän sisä- tai ulkopuolella (Kuva 19).

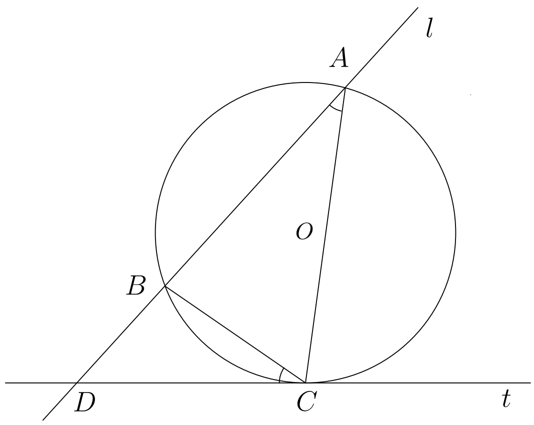


Kuva 19: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Todistus. Todistus löytyy kirjasta *Geometria*, K.Väisälä, 1959 sivulta 117 [5]. $\square$

Seuraavaksi otetaan käyttöön joitain yleisesti käytettyjä ympyrä koskevia lauseita, jotka esiintyvät myös seuraavien tehtävien todistusprosessissa.

Lause 9. *(Alternate Segment Theorem) Suora l leikkaa ympyrän pisteissä A ja B. Tangentti t leikkaa ympyrän pisteessä C. Suora l ja tangentti t leikkaavat pisteessä D. Tällöin $\angle BCD = \angle BAC$ (Kuva 20).*



Kuva 20

Todistus. Todistus löytyy kirjasta *Geometria*, K.Väisälä, 1959 sivulta 87 [5]. □

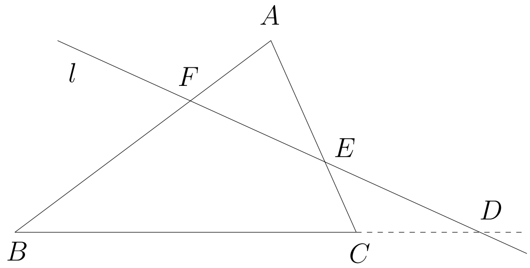
3 Mielenkiintoisia geometrisia lauseita ja tehtäviä

Geometriaa on kaikkialla maailmassa ja elämässämme. Egyptin pyramidit ja syömämme donitsit ovat kaikki erilaisia geometrisia muotoja. Miksi auton renkaat ovat pyöreitä? Onko kolmio vahvempi kuin nelikulmio rakentamisessa? Nämä ovat myös mielenkiintoisia geometrisia kysymyksiä. Geometrian kehittymisen ja tutkimuksen aikana ihmiset ovat löytäneet monia mielenkiintoisia geometrisia lauseita ja sääntöjä. Seuraavaksi tarkastellaan joitain geometrisia lauseita ja tehtäviä, jotta voidaan syvemmin ymmärtää suorien, kolmioiden ja ympyröiden välisiä suhteita.

3.1 Menelaoksen lause

Lause 10. *(Menelaoksen lause) Olkoon suora l, joka leikkaa kolmion $\triangle ABC$ sivut AB, BC ja AC tai niiden jatkeet pisteissä D, E, ja F. Pisteet D, E, ja F eivät kuitenkaan ole janojen päätepisteitä (Kuva 21). Tällöin*

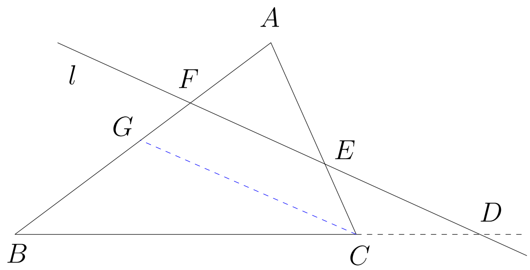
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$



Kuva 21

Menelaoksen lause on tasogeometrian tulos, joka koskee kolmiota ja suoraa, ja joka voidaan helposti todistaa yhdensuuntaisuuden ominaisuuden ja yhdenmuotoisuuden avulla.

Todistus. Piirretään pisteen C kautta suora CG, joka on yhdensuuntainen suoran DF kanssa, missä CG leikkaa sivun AB pisteessä G (Kuva 22).



Kuva 22

Tällöin kolmiossa $\triangle FBD$ saadaan $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BF}{FG}$, kolmiossa $\triangle AGC$ saadaan $\dfrac{CE}{EA} = \dfrac{GF}{FA}$, joten

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BF}{FG} \cdot \frac{GF}{FA} = 1.$$

$\square$

Menelaus of Alexandria (70 – 140 jKr.) oli kreikkalainen matemaatikko ja tähtitieteilijä. Menelauksen lause on esitetty hänen teoksessaan *Spherics*. Sen käänteinen lause pätee myös, eli jos D, E ja F ovat suorien BC, AC ja AB pisteitä, joille pätee

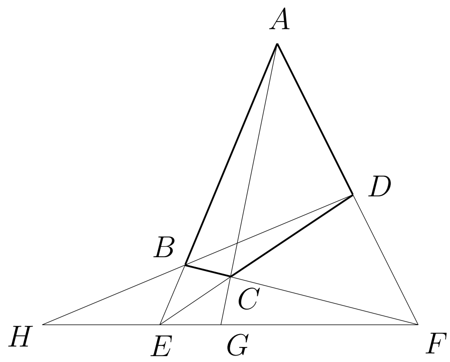
$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

ja jos pisteistä kaksi tai ei yhtään on kolmion $\triangle ABC$ sivuilla, niin pisteet D, E, ja F ovat samalla suoralla. Todistus löytyy kirjasta *Geometrian perusteita*, Matti Lehtinen, 2016 sivulta 33 [6].

Menelaoksen lauseen sovelluksia

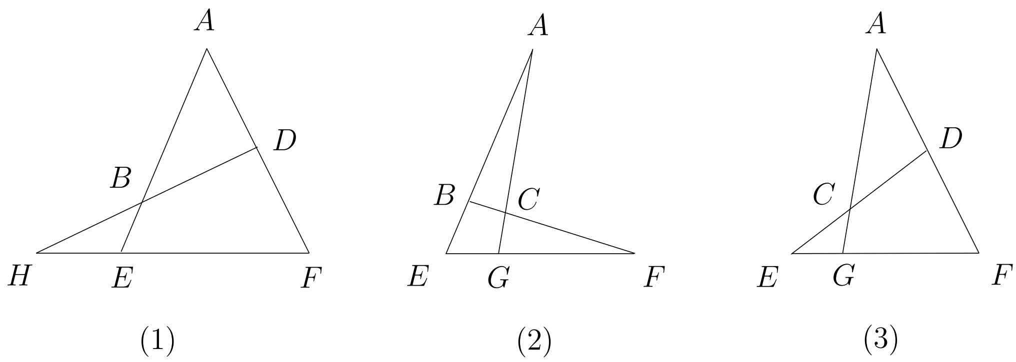
Menelaoksen ja sen käänteinen lause ovat erittäin hyödyllisiä käsiteltäessä sellaisia tehtäviä, joissa kolme pistettä ovat samalla suoralla tai jos halutaan tutkita janojen pituuksien suhdetta. Näiden tietojen perusteella voidaan saada enemmän hyödyllisiä tietoja. Esimerkiksi: onko kolmio tasakylkinen, suorakulmainen tai ovatko kolmiot yhdenmuotoiset. Nämä tiedot voidaan laajentaa kulmatietoihin tai jopa pinta-aloihin. Siksi jos kohdataan ylläolevan kaltaisia geometrian tehtäviä, Menelaoksen lausetta kannattaa kokeilla.

Esimerkki 1. Olkoon nelikulmio $ABCD$, missä janan AB jatke leikkaa janan CD jatkeen pisteessä E, janan AD jatke leikkaa janan BC jatkeen pisteessä F, janan BD jatke leikkaa janan EF jatkeen pisteessä H ja janan AC jatke leikkaa janan EF pisteessä G.
Osoita, että $HE \cdot FG = HF \cdot EG$ (Kuva 23).



Kuva 23

Pohdinta: Tässä tehtävässä pitää todistaa janojen pituuksien suhde, joten voidaan kokeilla siinä Menelaoksen lausetta. Kuvasta 23 voidaan löytää kolme erilaista alikuvaa (katso kuva 24). Menelauksen lauseen mukaan saadaan monta eri janan yhtälöä. Analysoimalla ja käsittelemällä näitä yhtälöitä, kuten sijoittamalla tai korvaamalla yhtälön elementit (eli janat), voidaan saada haluttu vastaus. Tämä tekniikka on erittäin hyödyllinen käsiteltäessä janojen pituuksien suhteita.



Kuva 24

Todistus. Menelauksen lauseen mukaan pätee

(1) suora HD leikkaa kolmio $\triangle AEF$; saadaan $\dfrac{AD}{DF} \cdot \dfrac{FH}{HE} \cdot \dfrac{EB}{BA} = 1$, ①

(2) suora BF leikkaa kolmio $\triangle AEG$; saadaan $\dfrac{AB}{BE} \cdot \dfrac{EF}{FG} \cdot \dfrac{GC}{CA} = 1$, ②

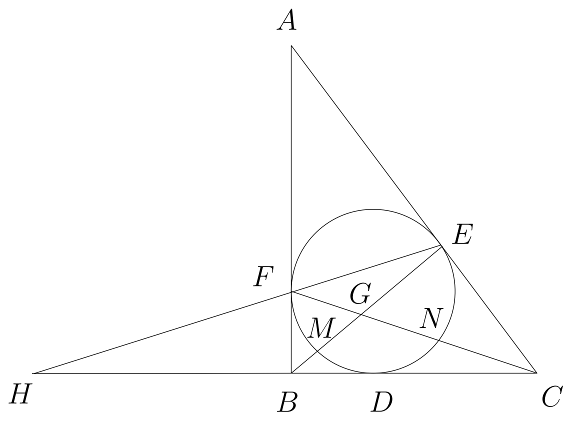
(3) suora DE leikkaa kolmio $\triangle AGF$; saadaan $\dfrac{AD}{DF} \cdot \dfrac{FE}{EG} \cdot \dfrac{GC}{CA} = 1.$ ③

Käyttämällä pohdinnan perusteluja ja osamäärää $\dfrac{①\cdot②}{③}$ saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{\dfrac{AD}{DF} \cdot \dfrac{FH}{HE} \cdot \dfrac{EB}{BA} \cdot \dfrac{AB}{BE} \cdot \dfrac{EF}{FG} \cdot \dfrac{GC}{CA}}{\dfrac{AD}{DF} \cdot \dfrac{FE}{EG} \cdot \dfrac{GC}{CA}} &= \frac{1 \cdot 1}{1}, \\
\frac{AD}{DF} \cdot \frac{FH}{HE} \cdot \frac{EB}{BA} \cdot \frac{AB}{BE} \cdot \frac{EF}{FG} \cdot \frac{GC}{CA} \cdot \frac{DF}{AD} \cdot \frac{EG}{FE} \cdot \frac{CA}{GC} &= 1, \\
\frac{FH}{HE} \cdot \frac{EG}{FG} &= 1.
\end{aligned}$$

Eli $HE \cdot FG = HF \cdot EG$. □

Esimerkki 2. Olkoon kolmio $\triangle ABC$, joka sivuaa sisäympyrää pisteissä D, E ja F. Jana BE leikkaa ympyrän pisteessä M, jana CF leikkaa ympyrän pisteessä N, jana BE leikkaa CF pisteessä G, ja janan EF:n jatke leikkaa janan CB jatkeen pisteessä H.
Osoita, että pisteet H, M ja N ovat samalla suoralla (Kuva 25).



Kuva 25

Pohdinta: Kun käsitellään yksinkertaisia tehtäviä, ei tarvitse miettiä liikaa ongelman ratkaisun menetelmiä ja taitoja, koska ratkaisu on hyvin ilmeinen. Kun kohdataan joitain vaikeita tehtäviä, on käytettävä järjestelmällisempää lähestymistapaa, jotta jokaisen välivaiheen tarkoitus olisi selkeä ja jotta emme aja itseämme kaaokseen. Pitää ensin määrittää tavoitteet. Mietitään sen jälkeen mahdollisia käytettäviä menetelmiä:

(i) Tavoite: Halutaan osoittaa, että pisteet H, M ja N ovat samalla suoralla.

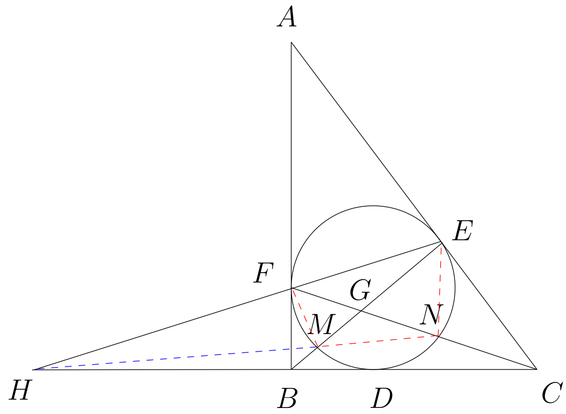
(ii) Mahdollinen menetelmä, lause tai kaava: Kysymyksenä on ovatko kolme pistettä samalla suoralla. Tällöin kannattaa kokeilla Menelauksen lausetta tai sen käänteistä lausetta. Esimerkkiin liittyvässä kuvassa 18 nähdään, että pisteet H, M ja N ovat samalla suoralla, ja että suora HMN leikkaa useita kolmioita, mutta kolmio $\triangle GBC$ liittyy suoraan pisteisiin M ja N, koska M ja N ovat niiden leikkauspisteitä. Joten jos voidaan todistaa, että

$$\frac{GN}{NC} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BM}{MG} = 1,$$

niin väite on todistettu.

Lisäksi tämä esimerkki sisältää vielä ympyrän, joten on otettava huomioon suoran ja ympyrän välinen suhde. Esimerkiksi janat AB ja AC ovat ympyrän tangentteja, joten voidaan käyttää lausetta 9 (sivu 24), joten täytyy yhdistää pisteet EN ja FM. Tässä esimerkissä on mahdollista myös käyttää pisteen potenssin lausetta 8 (sivu 23), jota käyttämällä saadaan myös janojen pituuksien suhde. Parempi tilanne olisi, jos kuvasta löytyisi myös yhdenmuotoisia kolmioita, koska näiden avulla saataisiin enemmän tietoa. Tästä seuraa se, että voidaan käyttää samanlaista tekniikkaa kuin edellisessä esimerkissä. Korvaamalla yhtälön elementit voidaan saada haluttu vastaus.

Todistus. Yhdistetään pisteet FM, MN, NE ja HM (Kuva 26).



Kuva 26

Menelauksen lauseen mukaan suora EH leikkaa kolmion $\triangle ABC$, jolloin saadaan

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1.$$

Koska kolmion sivut AB ja AC ovat myös ympyrän tangentteja, ja niiden leikkauspisteet ovat F ja E, joten $AE = AF$. Tästä seuraa

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BF}{FA} = \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BF}{EC} = 1 \quad \Longrightarrow \quad \frac{CH}{HB} = \frac{EC}{BF}. \qquad ①$$

Tämän lisäksi tiedetään

(1) $\triangle EFC \sim \triangle NEC$ (tunnetaan kolme kulmaa); Koska $\angle ECN = \angle ECF$, ja lauseen 9 mukaan $\angle NEC = \angle CFE$, niin tällöin $\angle ENC = \angle FEC$. Joten

$$\frac{NE}{NC} = \frac{EF}{EC}; \qquad ②$$

(2) $\triangle FBE \sim \triangle MBF$ (tunnetaan kolme kulmaa); Koska $\angle EBF = \angle MBF$, ja lauseen 9 mukaan $\angle BFM = \angle FEB$, niin tällöin $\angle FMB = \angle BFE$. Joten

$$\frac{MB}{MF} = \frac{FB}{FE}; \qquad ③$$

(3) $\triangle GEN \sim \triangle GFM$ (tunnetaan kolme kulmaa). Kehäkulmalauseen ja ristikulmalauseen mukaan, $\angle GEN = \angle MFG$, $\angle ENG = \angle GMF$, ja $\angle NGE = \angle FGM$. Joten

$$\frac{GN}{GM} = \frac{EN}{FM}. \qquad ④$$

Tästä seuraa suoran HM ja kolmion $\triangle GBC$ perusteella

$$\begin{aligned}
\frac{GN}{NC} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BM}{MG} &= \frac{GN}{GM} \cdot \frac{CH}{HB} \cdot \frac{BM}{NC}, \\
&= \frac{EN}{FM} \cdot \frac{EC}{BF} \cdot \frac{BM}{NC}, \qquad ④, ① \\
&= \frac{NE}{NC} \cdot \frac{EC}{BF} \cdot \frac{MB}{FM}, \\
&= \frac{EF}{EC} \cdot \frac{EC}{BF} \cdot \frac{FB}{FE}, \qquad ②, ③ \\
&= 1.
\end{aligned}$$

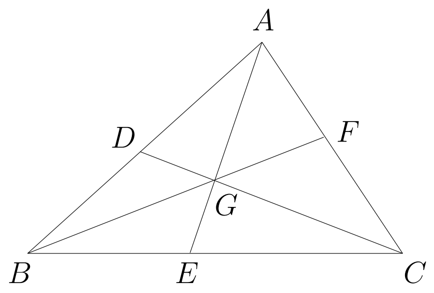
Tällöin Menelauksen käänteisen lauseen mukaan pisteet H, M ja N ovat samalla suoralla.

$\square$

3.2 Cevan lause

Lause 11. *(Cevan lause) Olkoot D, E ja F kolmion $\triangle ABC$ sivujen AB, BC ja AC pisteitä. Jos janat AE, BF ja CD kulkevat saman pisteen G kautta (Kuva 27), niin tällöin*

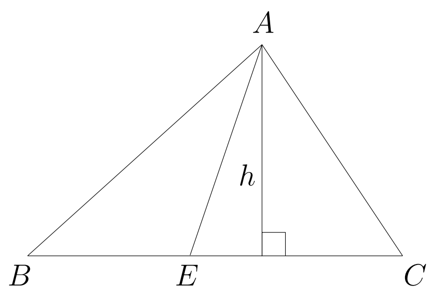
$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$



Kuva 27: $\dfrac{AD}{DB} \cdot \dfrac{BE}{EC} \cdot \dfrac{CF}{FA} = 1.$

Tämä lause voidaan todistaa esimerkiksi kolmion pinta-alan suhteen avulla. Kolmion pinta-alan suhteen menetelmä on se, että kolmiossa $\triangle ABC$ piste E on sivulla BC, ja h on kolmion korkeus (katso kuva 28). Merkitään $S_{\triangle ABC}$ kolmion $\triangle ABC$ pinta-alaa. Tällöin

$$\frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot BE \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot EC \cdot h} = \frac{BE}{EC}.$$



Kuva 28

Todistus. Kolmion pinta-alan suhteen menetelmän mukaan, alkuperäisestä kuvasta (Kuva 27) nähdään, että

(1) AD on kolmion $\triangle ADC$ sivu, DB on kolmion $\triangle BDC$ sivu. AD on myös kolmion $\triangle ADG$ sivu, ja DB on kolmion $\triangle DBG$ sivu. Tällöin saadaan

$$\frac{AD}{DB} = \frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle DBC}} = \frac{S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle DBG}}, \quad \text{niin} \quad \frac{AD}{DB} = \frac{S_{\triangle ADC} - S_{\triangle ADG}}{S_{\triangle DBC} - S_{\triangle DBG}} = \frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle GBC}}; \qquad ①$$

(2) BE on kolmion $\triangle ABE$ sivu, EC on kolmion $\triangle AEC$ sivu. BE on myös kolmion $\triangle GBE$ sivu, ja EC on kolmion $\triangle GEC$ sivu. Tällöin saadaan

$$\frac{BE}{EC} = \frac{S_{\triangle ABE}}{S_{\triangle AEC}} = \frac{S_{\triangle GBE}}{S_{\triangle GEC}}, \quad \text{niin} \quad \frac{BE}{EC} = \frac{S_{\triangle ABE} - S_{\triangle GBE}}{S_{\triangle AEC} - S_{\triangle GEC}} = \frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle AGC}}; \qquad ②$$

(3) CF on kolmion $\triangle FBC$ sivu, FA on kolmion $\triangle ABF$ sivu. CF on myös kolmion $\triangle FGC$ sivu, ja FA on kolmion $\triangle AGF$ sivu. Tällöin saadaan

$$\frac{CF}{FA} = \frac{S_{\triangle FBC}}{S_{\triangle ABF}} = \frac{S_{\triangle FGC}}{S_{\triangle AGF}}, \quad \text{niin} \quad \frac{CF}{FA} = \frac{S_{\triangle FBC} - S_{\triangle FGC}}{S_{\triangle ABF} - S_{\triangle AGF}} = \frac{S_{\triangle GBC}}{S_{\triangle ABG}}. \qquad ③$$

Tästä seuraa ① · ② · ③, jolloin saadaan

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{S_{\triangle AGC}}{S_{\triangle GBC}} \cdot \frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle AGC}} \cdot \frac{S_{\triangle GBC}}{S_{\triangle ABG}} = 1,$$

niin täten lause on todistettu. □

Cevan käänteinen lause pätee myös, eli jos

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

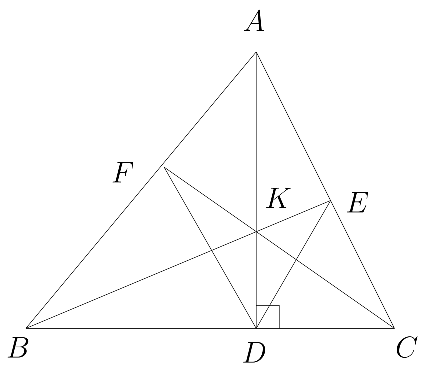
niin janat AE, BF ja CD kulkevat saman pisteen kautta. Todistus löytyy kirjasta

Geometrian perusteita, Matti Lehtinen, 2016 sivulta 34 [6].

Cevan lauseen sovelluksia

Giovanni Ceva (1647 - 1734) oli italialainen matemaatikko. Cevan lause on duaalinen Menelauksen lauseelle, mutta niiden erona on se, että Menelauksen lauseeseen sisältyvät kolme pistettä ovat samalla suoralla. Cevan lauseeseen sisältyvät kolme janaa kulkevat saman pisteen kautta.

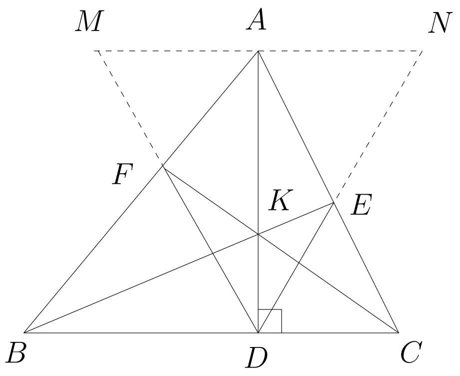
Esimerkki 3. Olkoon teräväkulmainen kolmio $\triangle ABC$, jossa jana AD on kolmion korkeus ja $AD \perp BC$. Piste K on janalla AD (K ei ole A eikä D), BK:n jatke leikkaa AC:n pisteessä E ja CK:n jatke leikkaa AB:n pisteessä F.
Osoita, että $\angle EDK = \angle KDF$ (Kuva 29).



Kuva 29

Pohdinta: Kuvasta 29 nähdään, että kolmella janalla AD, BE ja CF on yhteinen leikkauspiste, joten voidaan kokeilla Cevan lausetta. Jos on osoitettava, että kaksi kulmaa ovat samat, niin yksi mahdollinen menetelmä on käyttää yhdenmuotoisuutta. Koska piste K ei ole kiinteä piste, ja kuvasta ei löytynyt suoraan yhdenmuotoisia kolmioita, niin täten tarvitaan apuviivoja. Ideana on tehdä kaksi yhdenmuotoista kolmiota, joihin kuuluu $\angle EDK$ ja $\angle KDF$.

Todistus. Piirretään pisteen A kautta suora MN, joka on yhdensuuntainen suoran BC kanssa, MN leikkaa janan DF jatkeen pisteessä M ja janan DE jatkeen pisteessä N (katso kuva 30).



Kuva 30

Tällöin saadaan $\triangle FBD \sim \triangle FAM$ ja $\triangle EDC \sim \triangle ENA$, niin

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AM}{BD}, \quad \text{ja} \quad \frac{CE}{EA} = \frac{DC}{AN}.$$

Lisäksi kolme janaa AD, BE ja CF leikkaavat yhdessä pisteessä K, joten Cevan lauseen mukaan,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AM}{BD} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{DC}{AN} = \frac{AM}{AN} = 1,$$

joten $AM = AN$.

Koska $MN \mathbin{//} BC$ ja $AD \perp BC$, jolloin $AD \perp MN$ ja tällöin saadaan $\angle MAD = \angle DAN = 90°$. Lisäksi koska jana AD on yhteinen kolmioille $\triangle DAM$ ja $\triangle DAN$, niin $\triangle DAM \cong \triangle DAN$ (tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma). Täten

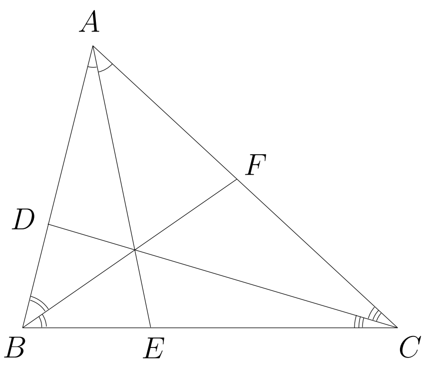
$$\angle ADM = \angle NDA, \quad \text{eli} \quad \angle EDK = \angle KDF.$$

Tarkentavana huomiona kun $AM = AN$ ja $AD \perp MN$, niin saadaan että $\triangle DMN$ on tasakylkinen kolmio, ja AD on myös kulman $\angle NDM$ puolittaja, joten

$$\angle EDK = \angle KDF.$$

$\square$

Esimerkki 4. Osoita, että kolmion kulmien puolittajat leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä.



Kuva 31

Pohdinta: tämä tehtävä voidaan helposti todistaa Cevan käänteisen lauseen avulla. Esimerkin vaikeutena on se, että miten saadaan selvitettyä janojen pituuksien suhde. Kuvasta 31 nähdään, että jos voidaan osoittaa, että

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

niin väite on todistettu. Täten tarvitaan kyseisten janojen pituuksien suhdetta. Koska tehtävässä käsitellään kolmion puolittajia, niin tällöin voidaan käyttää kolmion kulmanpuolittajalausetta, ja sitä käyttämällä saadaan janojen pituuden suhde.

Todistus. Olkoon kolmio $\triangle ABC$. Janat AE, BF ja CD ovat kolmion puolittajia (Kuva 31). Kolmion kulmanpuolittajalauseen (Lause 1) mukaan

(1) Jana AE puolittaa kulman $\angle BAC$, jolloin saadaan

$$\frac{BE}{EC} = \frac{AB}{AC}; \qquad ①$$

(2) Jana BF puolittaa kulman $\angle CBA$, jolloin saadaan

$$\frac{CF}{FA} = \frac{BC}{AB}. \qquad ②$$

(3) Jana CD puolittaa kulman $\angle ACB$, jolloin saadaan

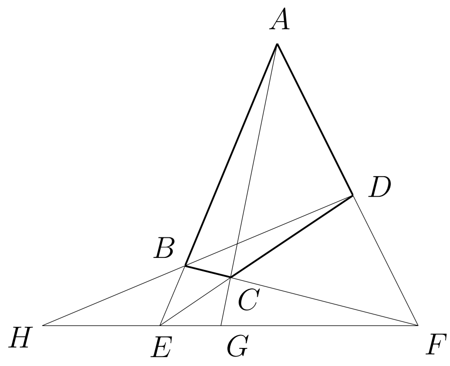
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}; \qquad ③$$

Tällöin ① · ② · ③, saadaan

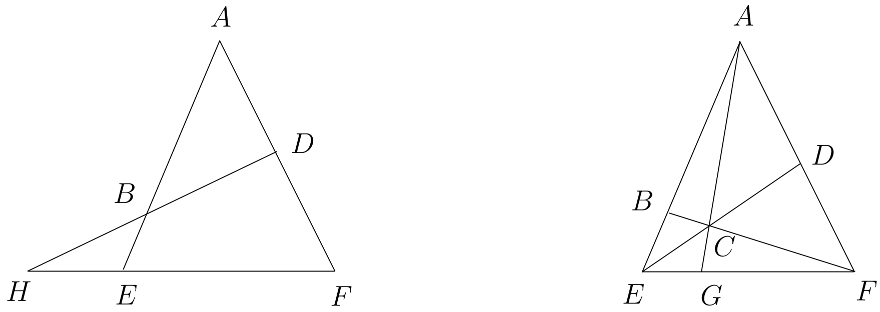
$$\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} \cdot \frac{AC}{BC} = 1.$$

Cevan käänteisen lauseen mukaan tällöin tiedetään, että AE, BF ja CD leikkaavat toisensa yhdessä pisteessä. □

Koska *Menelauksen lause* ja *Cevan lause* liittyvät läheisesti toisiinsa, niin täten niitä voidaan käyttää myös joskus yhdessä. Seuraavaksi esitetään **Esimerkin** 1 (sivu 26) vaihtoehtoinen ratkaisutapa.
Pohdinta: Tällä kerralla kaytetään sekä Menelauksen lausetta että Cevan lausetta. Tehtävän alkuperäinen kuva 23 voidaan jakaa kahteen osaan (Kuva 32).



Kuva 23



(1) (2)

Kuva 32

Todistus. (Esimerkin 1 vaihtoehtoinen ratkaisutapa)

(1) Menelauksen lauseen mukaan suora HD leikkaa kolmion $\triangle AEF$, jolloin saadaan

$$\frac{AD}{DF} \cdot \frac{FH}{HE} \cdot \frac{EB}{BA} = 1; \qquad ①$$

(2) Cevan lauseen mukaan, koska kolmiossa $\triangle AEF$ janat AG, BF ja ED leikkaavat yhteisessä pisteessä C, saadaan

$$\frac{AB}{BE} \cdot \frac{EG}{GF} \cdot \frac{FD}{DA} = 1. \qquad ②$$

Tällöin ① · ②, jolloin saadaan

$$\frac{AD}{DF} \cdot \frac{FH}{HE} \cdot \frac{EB}{BA} \cdot \frac{AB}{BE} \cdot \frac{EG}{GF} \cdot \frac{FD}{DA} = 1 \cdot 1,$$
$$\frac{FH}{HE} \cdot \frac{EG}{GF} = 1.$$

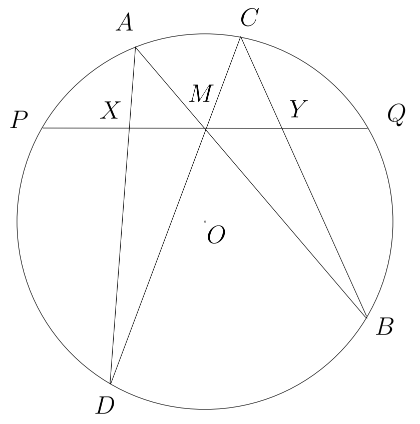
Eli $HE \cdot FG = HF \cdot EG$. □

4 Perhoslause

Perhoslause on mielenkiintoinen lause, joka sisältää suoria, kolmioita ja ympyröitä. Sen esitti ensimmäisen kerran Sir William Wallace *The Gentlemen's Mathematical Companion* lehdessä vuonna 1803 [12]. William Wallace oli matematiikan professori Edinburghissa yliopistossa vuosina 1819 – 1838 ja aiemmin hän oli opettanut Royal Military Collegessa ja Sandhurstissa. Perhoslauseen nimen se sai *American Mathematical Monthly* lehdessä vuonna 1944, koska sitä havainnollistava kuvio kuvasi perhosia [13]. On todella monta tapaa todistaa tämä lause. William Wallacen todistus on varhaisin todistus mitä nyt tiedämme. Se löydettiin Wallacen kirjeestä Herschelille vuonna 1805[14]. Gradussani todistus perustuu Shklyarskyn todistusmenetelmään (Proof 2, Shklyarsky, problem 104, solution 1 [15]).

4.1 Perhoslause

Lause 12. *(Perhoslause) Olkoon O ympyrän keskipiste. Piirretään ympyrälle mielivaltainen jänne PQ ja merkitään sen keskipistettä M. Piirretään sitten ympyrälle jänteet AB ja CD siten, että ne kulkevat pisteen M kautta. Muodostetaan janat AD ja BC. Merkitään janojen AD ja PQ leikkauspistettä X ja janojen BC ja PQ leikkauspistettä Y. Tällöin M on myös janan XY keskipiste, eli $MX = MY$ (Kuva 33).*



Kuva 33

Pohdinta: Matemaattisissa tehtävissä voidaan käyttää eteenpäin suuntautuvaa tai käänteistä ajattelua. Joissakin tehtävissä eteenpäin suuntautuva ajattelu riittää, mutta joidenkin vaikeiden tehtävien ratkaisemisessa eteenpäin suuntautuva ajattelu ei riitä. Joskus jäädään jumiin johonkin kohtaan prosessin aikana eikä päästä eteenpäin. Tässä tilanteessa ajattelutapamme voi olla alusta asti väärä, kaikkia tietojamme ei ole mahdollisesti käytetty tai joudutaan luomaan lisää ehtoja piirtämällä apuviivoja. Tällä hetkellä on käytettävä käänteistä ajattelua, jotta voidaan tarkistaa mitkä ehdot tarvitaan tavoitteiden saavuttamiseksi.

(1) Tavoite: Halutaan osoittaa, että M on janan XY keskipiste, eli $XM = MY$.

(2) Eteenpäin suuntautuva ajattelu: ensinnäkin pitää etsiä hyödyllistä tietoa tehtävästä.

   (a) Koska M on jänteen PQ keskipiste, niin $PM = MQ$.

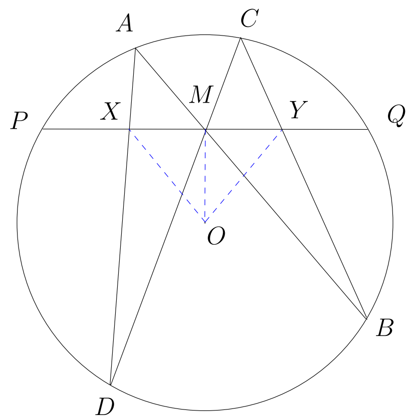
   (b) Koska samaa kaarta vastaavat ympyrän kehäkulmat ovat yhtä suuret, niin tällöin $\angle DAB = \angle DCB$ ja $\angle CBA = \angle CDA$.

   (c) Lisäksi ristikulmat ovat yhtä suuret, joten $\angle AMX = \angle BMY$ ja $\angle XMD = \angle YMC$, $\angle AMD = \angle BMC$.

(d) Tästä seuraa, että saadaan myös kolmiot $\triangle AMD \sim \triangle CMB$, koska $\angle DAM = \angle MCB$, $\angle AMD = \angle BMC$ ja $\angle MDA = \angle CBM$.

On hyvä olla paljon hyödyllistä tietoa, mutta näyttää siltä, että tavoitettamme ei pystytä saavuttamaan tiedoillamme. Tarvitaan lisätietoja, joten on käytettävä käänteistä ajattelua.

(3) Käänteinen ajattelu: Missä olosuhteissa voidaan osoittaa, että kahden janan pituus on sama? Tällä hetkellä kannattaa yrittää piirtää apuviivoja. Esimerkiksi voidaan yhdistää pisteet OM, OX ja OY (Kuva 34), niin saadaan lisätietoja.

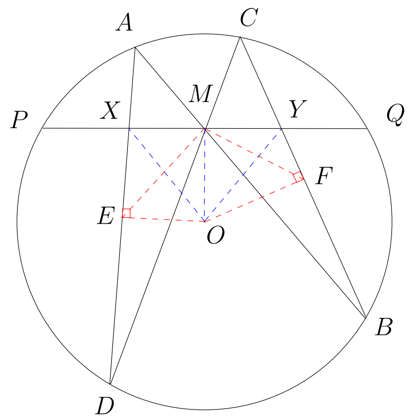


Kuva 34

(e) Koska M on jänteen PQ keskipiste, niin $OM \perp PQ$ ja tällöin $\angle XMO = \angle OMY = \dfrac{\pi}{2}$.

(f) Kolmioilla $\triangle OMX$ ja $\triangle OMY$ on yhteinen sivu OM. Jos voidaan todistaa, että $\angle MOX = \angle YOM$, niin kolmiot $\triangle OMX$ ja $\triangle OMY$ ovat yhtenevät (tunnetaan kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu), joten saadaan $MX = MY$.

Piirretään pisteen O kautta jänteen AD normaali OE ja yhdistetään pisteet E ja M. Piirretään pisteen O kautta jänteelle BC normaali OF ja yhdistetään pisteet F ja M (Kuva 35).



Kuva 35

(g) Koska $OE \perp AD$, niin täten $\angle OEX = \dfrac{\pi}{2}$, lisäksi $\angle XMO = \dfrac{\pi}{2}$, tällöin

$$\angle OEX + \angle XMO = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi,$$

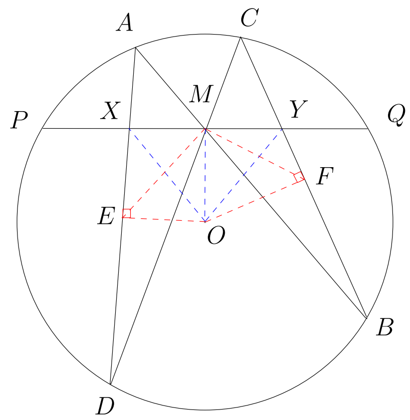
joten saadaan nelikulmio $OEXM$ joka on jännenelikulmio, joten $\angle MEX$ ja $\angle MOX$ ovat samaa kaarta vastaavat ympyrän kehäkulmat, eli ne ovat yhtä suuret.

(h) Samalla tavalla saadaan nelikulmio $OMYF$ joka on myös jännenelikulmio. Tällöin $\angle YOM$ ja $\angle YFM$ ovat samaa kaarta vastaavia ympyrän kehäkulmia, eli $\angle YOM = \angle YFM$.

Jos voidaan osoittaa, että $\angle MEX = \angle YFM$, niin saadaan $\angle MOX = \angle YOM$. Koska $\angle MEX + \angle DEM = \pi$ ja $\angle YFM + \angle MFB = \pi$, niin tällöin jos $\angle DEM = \angle MFB$, niin tästä seuraa $\angle MEX = \angle YFM$. Tämä saadaan helposti osoittamalla että $\triangle MED$ ja $\triangle MFB$ ovat yhdenmuotoisia. Eli tavoitteemme on nyt todistaa, että $\triangle MED \sim \triangle MFB$.

Todistus. Piirretään pisteen O kautta jänteelle AD normaali OE ja yhdistetään pisteet E ja M. Piirretään pisteen O kautta jänteelle BC normaali OF ja yhdistetään pisteet F

ja M. Lisäksi vielä piirretään janat OM, OX ja OY (Kuva 36).



Kuva 36

(1) Koska $OE \perp AD$, ja AD on ympyrän O jänne, saadaan $AE = ED$ ja $\angle OEX = \frac{\pi}{2}$.

(2) Koska $OF \perp BC$, ja BC on ympyrän O jänne, saadaan $CF = FB$ ja $\angle YFO = \frac{\pi}{2}$.

(3) Kehäkulmalauseen mukaan saadaan $\angle DAM = \angle MCB$ ja $\angle MDA = \angle CBM$.

(4) Ristikulmalauseen mukaan saadaan $\angle AMD = \angle BMC$.

Siis kolmiot $\triangle AMD$ ja $\triangle CMB$ ovat yhdenmuotoisia (tunnetaan kolme kulmaa). Tällöin

$$\frac{MD}{MB} = \frac{AD}{CB} = \frac{2ED}{2FB} = \frac{ED}{FB}.$$

Täten myös kolmiot $\triangle MED$ ja $\triangle MFB$ ovat yhdenmuotoisia (tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma), joten $\angle DEM = \angle MFB$.

Koska $\angle MEX = \pi - \angle DEM$, ja $\angle YFM = \pi - \angle MFB$, niin $\angle MEX = \angle YFM$. Koska M on jänteen PQ keskipiste, niin tällöin $OM \perp PQ$ ja $\angle XMO = \angle OMY = \frac{\pi}{2}$. Lisäksi $\angle OEX = \frac{\pi}{2}$, joten

$$\angle XMO + \angle OEX = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

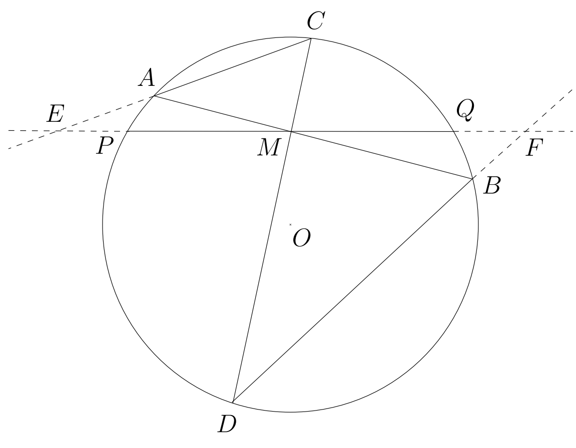
Eli nelikulmiossa $OEXM$ vastakkaiset kulmat $\angle XMO$ ja $\angle OEX$ ovat toistensa suplementtikulmia. Tällöin saadaan nelikulmio $OEXM$, joka on jännenelikulmio, joten $\angle MEX$ ja $\angle MOX$ ovat samaa kaarta vastaavat ympyrän kehäkulmat, ja ne ovat yhtä suuret.

Samalla tavalla saadaan nelikulmio $OMYF$, joka on myös jännenelikulmio. Tällöin $\angle YOM$ ja $\angle YFM$ ovat samaa kaarta vastaavat ympyrän kehäkulmat, eli ne ovat yhtä suuret. Näin ollen $\angle MOX = \angle MEX = \angle YFM = \angle YOM$. Koska jana OM on yhteinen kolmioille $\triangle OMX$ ja $\triangle OMY$, lisäksi $\angle XMO = \angle OMY = \dfrac{\pi}{2}$, niin saadaan $\triangle OMX \cong \triangle OMY$ (tunnetaan kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu). Tällöin saadaan, että

$$MX = MY.$$

$\square$

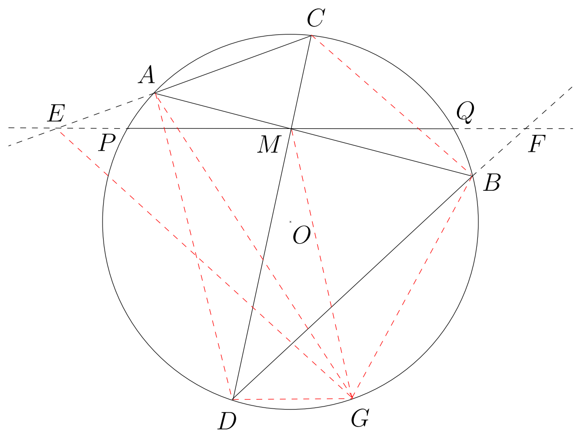
Korollaari 2. *Olkoon O ympyrän keskipiste. Piirretään ympyrälle mielivaltainen jänne PQ ja merkitään sen keskipistettä M. Piirretään tämän jälkeen ympyrälle jänteet AB ja CD siten, että ne kulkevat pisteen M kautta. Muodostetaan janat AC ja BD. Jos $AC \nparallel PQ$ ja $BD \nparallel PQ$, niin janan PQ jatke leikkaa jänteen AC ja BD jatkeet pisteissä E ja F. Tällöin $ME = MF$ (Kuva 37).*



Kuva 37

Pohdinta: Tämän korollaarin todistusmenetelmä on melkein samanlainen kuin perhoslauseen todistuksessa käytetty todistusmenetelmä. Päätarkoitus on rakentaa yhtenevät kolmiot piirtämällä apuviivoja, jotka sisältävät janat ME ja MF. Tällöin saadaan näytettyä, että $ME = MF$. Lisäksi tulee kiinnittää huomiota myös perhoslauseen todentamisprosessissa siihen, että on erittäin tehokas tapa käyttää jännenelikulmion ominaisuuksia yhtä suurten kulmien osoittamiseksi, varsinkin kun ongelmassa esiintyy ympyröitä ja kolmioita.

Todistus. Piirretään pisteen D kautta jänne DG, joka leikkaa ympyrän pisteessä G ja $DG \parallel PQ$. Piirretään janat AD, EG, AG, MG, BG ja BC (Kuva 38).



Kuva 38

Koska $DG \parallel PQ$ ja piste M on janan PQ keskipiste, joten kolmio $\triangle MDG$ on tasakylkinen kolmio, eli $MD = MG$ ja $\angle GDM = \angle MGD$. Lisäksi yhdensuuntaisuuden mukaan $\angle EMD = \angle GDM$ ja $\angle GMF = \angle MGD$. Tällöin saadaan $\angle EMD = \angle GMF$, ja täten

$$\angle EMG = \angle EMD + \angle DMG = \angle GMF + \angle DMG = \angle DMF.$$

Koska $DG \parallel EF$, jolloin $\angle DMF + \angle GDM = 180°$. Lisäksi $\angle GDM = \angle GAC$

(koska ne ovat saman jänteen CG vastaavat samalla puolella olevat kehäkulmat), jolloin $\angle DMF + \angle GAC = 180°$.

Koska $\angle EAG + \angle GAC = 180°$, niin täten $\angle EAG = \angle DMF = \angle EMG$. Eli sivun AE ja lävistäjän AG välinen kulma $\angle EAG$ on yhtä suuri kuin vastaisen sivun MG ja toisen lävistäjän EM välinen kulma $\angle EMG$ viereisessä kulmassa. Tällöin saadaan nelikulmio $EAMG$, joka on jännenelikulmio, joten $\angle EAM + \angle MGE = 180°$. Lisäksi $\angle EAM + \angle BAC = 180°$, joten $\angle MGE = \angle BAC$.

Koska kulmat $\angle BDC$ ja $\angle BAC$ ovat jännettä BC vastaavia kehäkulmia, jotka ovat samalla puolella jännettä, niin $\angle BDC = \angle BAC$, ja täten kulmat $\angle BDC$ ja $\angle MGE$ ovat myös yhtä suuret. Tämän lisäksi $\angle FDM$ ja $\angle BDC$ ovat sama kulma, ja tällöin saadaan että $\angle MGE = \angle BAC = \angle BDC = \angle FDM$.

Näistä kohdista seuraa, että kolmioissa $\triangle EMG$ ja $\triangle FMD$ pätee

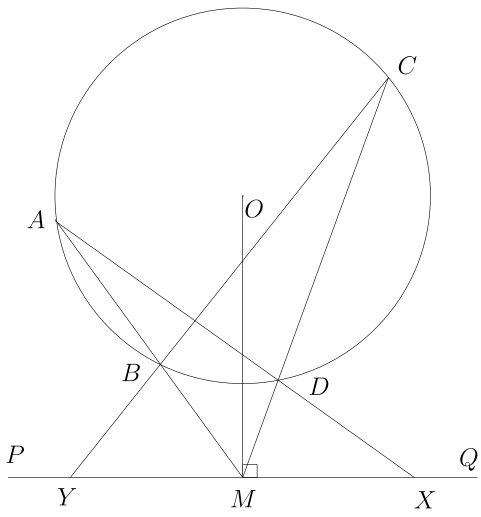
$$\angle EMG = \angle DMF, \quad \angle MGE = \angle FDM \quad \text{ja} \quad MG = MD,$$

eli kolmion kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa. Täten kolmiot $\triangle EMG$ ja $\triangle FMD$ ovat yhtenevät, josta saadaan että

$$ME = MF.$$

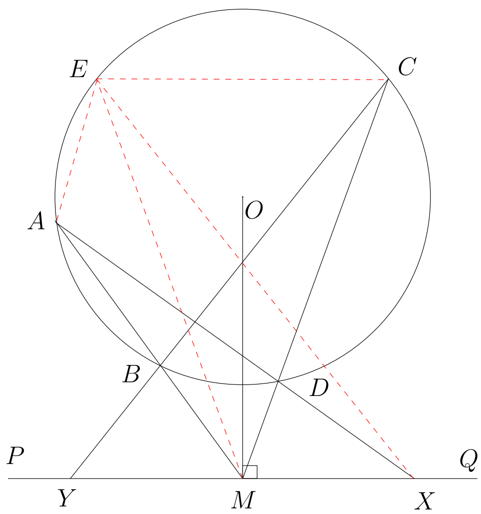
□

Korollaari 3. *Olkoon O ympyrän keskipiste ja olkoon suora PQ sen ulkopuolella. Piirretään pisteen O kautta jana OM, joka $OM \perp PQ$ ja jana OM leikkaa suoran PQ pisteessä M. Piirretään pisteen M kautta jana MA, jonka ympyrän kehän leikkauspisteet ovat A ja B. Piirretään pisteen M kautta jana MC, jonka ympyrän kehän leikkauspisteet ovat C ja D. Piirretään janat AD ja CB, joiden jatkeet leikkaavat suoran PQ pisteissä X ja Y. Tällöin $MX = MY$ (Kuva 39).*



Kuva 39

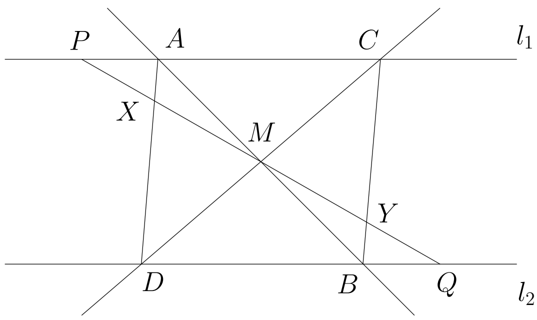
Pohdinta: Samanlainen lähestymistapa kuin korollaarin 2 todistuksessa voisi toimia. Piirretään pisteen C kautta jänne CE, joka on sellainen, että CE leikkaa ympyrän pisteessä E ja CE // PQ. Muodostetaan janat AE, EM ja EX yhdistämällä vastaavat pisteet (Kuva 40). Tavoitteenamme on todistaa, että nelikulmio $AEXM$ on jännenelikulmio. Sen jälkeen todistetaan, että kolmiot $\triangle EMX$ ja $\triangle CMY$ ovat yhtenevät, jolloin saadaan $MX = MY$.



Kuva 40

Todistus. Koska todistuksen vaiheet ja menetelmät ovat täsmälleen samat kuin korollaarin 2 todistuksessa, kiinnostuneet lukijat voivat yrittää todistaa esitetyn korollaarin mukailemalla korollaarin 2 todistusta. Todistus löytyy myös liitteestä A.2. □

Korollaari 4. *(Perhoslause yhdensuuntaisten suorien välillä): Olkoot l_1 ja l_2 kaksi yhdensuuntaista suoraa. Olkoon piste P suoralla l_1 ja piste Q suoralla l_2 ja olkoon piste M janan PQ keskipiste. Piirretään pisteen M kautta suora AB, joka leikkaa suoran l_1 pisteessä A, sekä l_2 pisteessä B. Piirretään pisteen M kautta suora CD, jotka leikkaavat l_1 pisteessä C, sekä l_2 pisteessä D. Piirretään janat AD ja CB, jotka leikkaavat janan PQ tai sen jatkeen pisteissä X ja Y. Tällöin $MX = MY$ (Kuva 41).*



Kuva 41

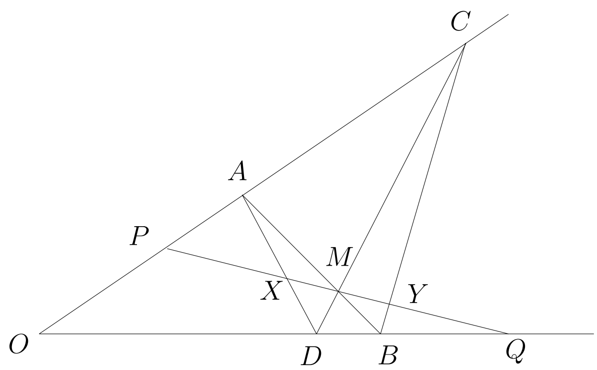
Pohdinta: Tämä korollaari voidaan todistaa helposti kolmoiden yhdenmuotoisuuden avulla. Esimerkiksi käyttämällä yhdenmuotoisuuksia $\triangle MXA \cong \triangle MYB$ tai $\triangle MDX \cong \triangle MCY$ väite saadaan näytettyä.

Todistus. Koska $l_1 \parallel l_2$, niin saadaan $\angle MPA = \angle MQB$. Koska M on janan PQ keskipiste, niin $MP = MQ$. Lisäksi kulmat $\angle AMP$ ja $\angle BMQ$ ovat ristikulmat, joten ne ovat yhtä suuret. Kolmion kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, jolloin kolmiot $\triangle MPA$ ja $\triangle MQB$ ovat yhtenevät. Tällöin saadaan, että $MA = MB$.

Koska $l_1 \;//\; l_2$, niin saadaan $\angle MAC = \angle MBD$. Kulmat $\angle CMA$ ja $\angle DMB$ ovat ristikulmat, ja täten ne ovat yhtä suuret. Lisäksi $MA = MB$, jolloin kolmiot $\triangle MAC$ ja $\triangle MBD$ ovat yhtenevät, joten $MC = MD$, eli janat AB ja CD puolittavat toisensa, joten nelikulmio $ACBD$ on suunnikas.

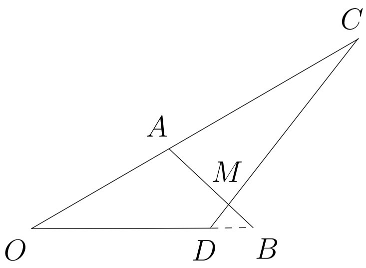
Tästä seuraa $AD \;//\; CB$, joten $\angle MDX = \angle MCY$. Kulmat $\angle XMD$ ja $\angle YMC$ ovat yhtä suuret ristikulmat, ja tämän lisäksi $MC = MD$. Tällöin kolmiot $\triangle MDX$ ja $\triangle MCY$ ovat yhtenevät, joten $MX = MY$. $\square$

Korollaari 5. *(Perhoslause kulmassa): Olkoot piste P kulman $\angle QOP$ sivulla OP ja piste Q kulman $\angle QOP$ sivulla OQ. Olkoon piste M janan PQ keskpiste. Piirretään pisteen M kautta jana AB, joka leikkaa sivun OP pisteessä A, sekä sivun OQ pisteessä B. Piirretään pisteen M kautta jana CD, joka leikkaa sivun OP pisteessä C, sekä sivun OQ pisteessä D. Piirretään jana AD, joka leikkaa janan PQ pisteessä X. Piirretään jana BC, joka leikkaa janan PQ pisteissä Y. Tällöin $MX = MY$ (Kuva 42).*

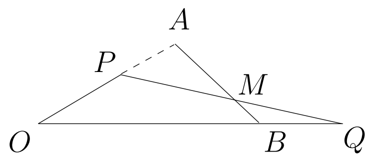


Kuva 42

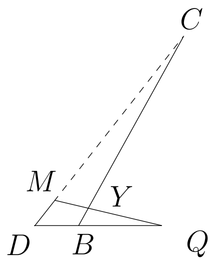
Pohdinta: Tehtävän kuva 42 voidaan osittaa erilaisilla suorilla, jotka leikkaavat eri kolmioita. Täten tämän korollaarin voidaan todistaa Menelaoksen lauseen avulla. Analysoimalla ja käsittelemällä näitä Menelaoksen lauseen avulla saatuja yhtälöitä voidaan saada haluttu lopputulos.



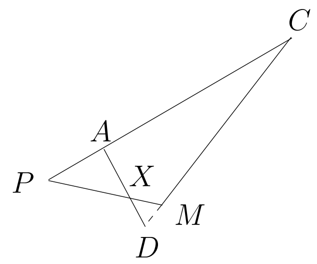
(1)



(2)



(3)



(4)

Todistus. Menelauksen lauseen mukaan

(1) suora AMB leikkaa kolmion $\triangle COD$, joten saadaan $\dfrac{CA}{AO} \cdot \dfrac{OB}{BD} \cdot \dfrac{DM}{MC} = 1;$ ①

(2) suora AMB leikkaa kolmion $\triangle POQ$, joten saadaan $\dfrac{QB}{BO} \cdot \dfrac{OA}{AP} \cdot \dfrac{PM}{MQ} = 1;$ ②

(3) suora CYB leikkaa kolmion $\triangle MDQ$, joten saadaan $\dfrac{QB}{BD} \cdot \dfrac{DC}{CM} \cdot \dfrac{MY}{YQ} = 1;$ ③

(4) suora AXD leikkaa kolmion $\triangle CPM$, joten saadaan $\dfrac{PA}{AC} \cdot \dfrac{CD}{DM} \cdot \dfrac{MX}{XP} = 1.$ ④

Osamäärästä $\dfrac{① \cdot ② \cdot ④}{③}$ saadaan

$$\frac{\dfrac{CA}{AO} \cdot \dfrac{OB}{BD} \cdot \dfrac{DM}{MC} \cdot \dfrac{QB}{BO} \cdot \dfrac{OA}{AP} \cdot \dfrac{PM}{MQ} \cdot \dfrac{PA}{AC} \cdot \dfrac{CD}{DM} \cdot \dfrac{MX}{XP}}{\dfrac{QB}{BD} \cdot \dfrac{DC}{CM} \cdot \dfrac{MY}{YQ}} = 1,$$

$$\frac{CA}{AO} \cdot \frac{OB}{BD} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{QB}{BO} \cdot \frac{OA}{AP} \cdot \frac{PM}{MQ} \cdot \frac{PA}{AC} \cdot \frac{CD}{DM} \cdot \frac{MX}{XP} \cdot \frac{BD}{QB} \cdot \frac{CM}{DC} \cdot \frac{YQ}{MY} = 1,$$

$$\frac{PM}{MQ} \cdot \frac{MX}{XP} \cdot \frac{YQ}{MY} = 1.$$

Koska piste M on janan PQ keskipiste, niin $PM = MQ$ ja täten

$$\frac{PM}{MQ} \cdot \frac{MX}{XP} \cdot \frac{YQ}{MY} = \frac{MX}{XP} \cdot \frac{YQ}{MY} = 1, \quad \text{eli} \quad \frac{MX}{XP} = \frac{MY}{YQ}.$$

Tällöin

$$\frac{MX}{XP + MX} = \frac{MY}{YQ + MY},$$

$$\frac{MX}{PM} = \frac{MY}{MQ},$$

$$MX \cdot MQ = MY \cdot PM,$$

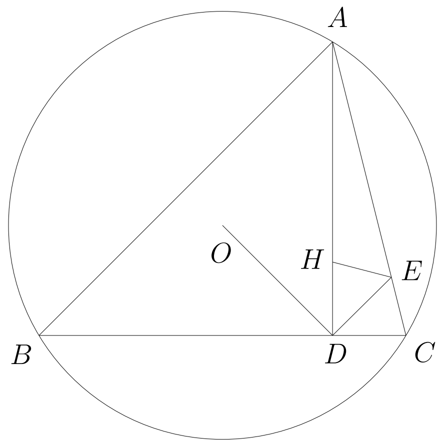
$$MX = MY.$$

$\square$

4.2 Perhoslauseen sovelluksia

Perhoslauseen mahdolliset sovelluskohteet ovat erittäin laajoja, sillä se pätee myös ellipsissä ja hyperbolassa. Näitä tapauksia ei tässä tutkielmassa tarkastella, mutta halutessaan lukija voi näihin tutustua lähteistä [17] ja [18]. Perhoslause sisältää monia elementtejä, kuten keskipisteen, kohtisuoran, kehäkulman, kolme yhdessä pisteessä leikkaavaa jännettä ja niin edelleen. Yleensä tehtävässä ei ole annettu kaikki ehtoja, joten on mietittävä mitkä elementit puuttuvat, ja täytettävä kaikki lauseen edellyttämät ehdot piirtämällä apuviivoja.

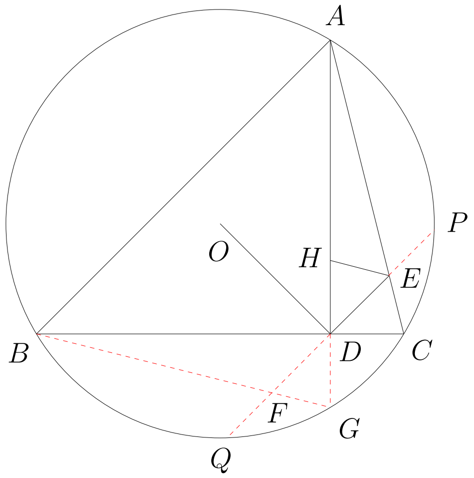
Esimerkki 5. Oletetaan, että teräväkulmaisessa kolmiossa $\triangle ABC$ pätee $AB > AC$. Piste O on kolmion ympäri piirretyn ympyrän keskipiste. Piste H on kolmion ortokeskus. Janan AH jatke leikkaa janan BC pisteessä D, eli $AD \perp BC$. Lisäksi piste E on sivulla AC ja $OD \perp DE$. Osoita, että $\angle DHE = \angle ECD$ (Kuva 43).



Kuva 43

Pohdinta: Esimerkin kuvasta 43 voidaan nähdä puutteellinen perhonen. Tehtävämme on täydentää koko perhonen piirtämällä apuviivoja ja käyttää sitten perhoslausetta hyödyllisen tiedon saamiseksi. Kuvasta löytyy ympyrä O ja jana OD, joka kulkee ympyrän keskipisteen kautta. Koska $OD \perp DE$, ja DE on sekä kolmion $\triangle HDE$ sivu että kolmion

$\triangle EDC$ sivu, johon kuuluvat kolmiot $\angle DHE$ ja $\angle ECD$, tälle alueelle kannattaa piirtää apuviivoja. Laajennetaan jana ED, joka leikkaa ympyrän O pisteissä P ja Q. Laajennetaan jana AD, joka leikkaa ympyrän O pisteessä G (Kuva 44).



Kuva 44

Tällöin kaikki perhoslauseen edellyttämät tärkeät elementit on näytetty pätevän. Eli

(1) ympyrä O;

(2) jänne PQ ja sen keskipiste D (todistettava);

(3) jänteet AG ja BC, jotka kulkevat pisteen D kautta.

Lopullinen tavoitteemme on todistaa, että nämä kaksi kulmaa $\angle DHE$ ja $\angle ECD$ ovat yhtä suuret yhdenmuotoisuuden tai yhtenevien kolmioiden avulla.

Todistus. Laajennetaan jana ED, joka leikkaa ympyrän O pisteissä P ja Q (katso kuva 44). Koska $OD \perp DE$, niin täten piste D on jänteen PQ keskipiste. Laajennetaan jana AD, joka leikkaa ympyrän O pisteessä G. Muodostetaan jana BG, joka leikkaa jänteen PQ pisteessä F.

Tästä seuraa, että ympyrässä O piste D on jänteen PQ keskipiste ja janat AG ja BC ovat pisteen D kautta piirrettävät jänteet. Jänne AC leikkaa jänteen PQ pisteessä E

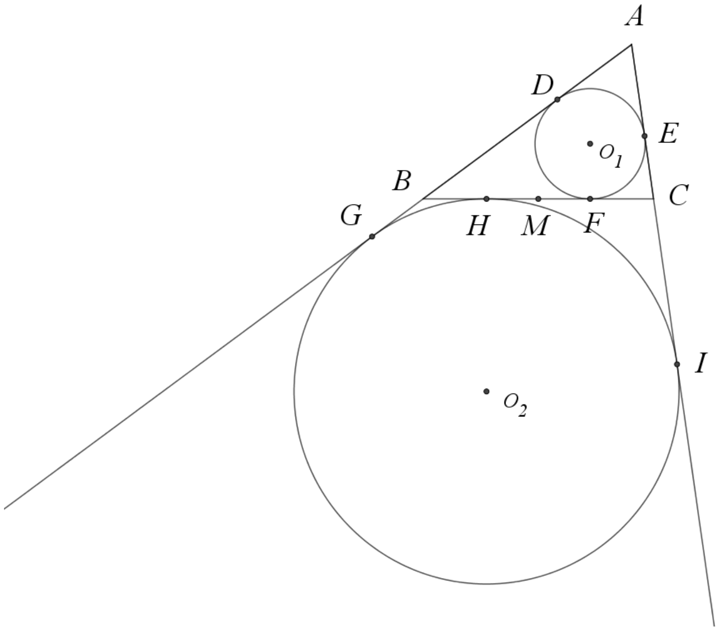
ja jänne BG leikkaa jänteen PQ pisteessä F. Perhoslauseen mukaan tällöin $DE = DF$. Lisäksi kulmat $\angle EDH$ ja $\angle FDG$ ovat ristikulmat, joten ne ovat yhtä suuret.

Koska piste H on kolmion ortokeskus, sen ominaisuuksien (sivu 12) perustella pisteen H symmetriapiste sivun BC suhteen on ulkoympyrän kehällä, eli se on piste G. Täten pätee $DH = DG$. Tällöin kolmiot $\triangle DHE$ ja $\triangle DGF$ ovat yhtenevät (kolmion kaksi sivua ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa), joten saadaan $\angle DHE = \angle DGF$.

Kulmat $\angle DGF$ ja $\angle ECD$ ovat jännettä AB vastaavat samalla puolella olevat kehäkulmat, jolloin $\angle DGF = \angle ECD$, ja tällöin saadaan $\angle DHE = \angle DGF = \angle ECD$. Näin ollen alkuperäinen väite on todistettu. □

Perhoslausetta käytetään myös usein joidenkin lemmojen yhteydessä, eli perhoslauseen avulla voidaan käsitellä monipuolisempia tilanteita, kuten sisäympyrää, vierusympyrää, sivuamispisteitä ja niin edelleen.

Lemma 1. *Kolmiossa $\triangle ABC$ piste M on sivun BC keskipiste. Piste F on sivun BC ja sisäympyrän O_1 sivuamispiste. Piste H on sivun BC ja vierusympyrän O_2 sivuamispiste. Tällöin $HM = MF$ (Kuva 45).*



Kuva 45

Todistus. Olkoot pisteet D ja G sivun AB tai sen jatkeen ja ympyröiden O_1, O_2 sivuamispisteitä, ja pisteet E ja I sivun AC tai sen jatkeen ja ympyröiden O_1, O_2 sivuamispisteitä.

Koska janojen etäisyys ympyrän ulkopuolisesta pisteestä sivuamispisteisiin ovat yhtäpitkät, niin tällöin saadaan

$$(1)\ AD = AE; \quad (2)\ BD = BF; \quad (3)\ CE = CF;$$

$$(4)\ BG = BH; \quad (5)\ CH = CI; \quad (6)\ AG = AI.$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
\underbrace{AG - AD}_{(6)-(1)} &= AI - AE \\
\iff \qquad DG \quad &= \quad EI \\
\iff \qquad BD + BG &= \underbrace{CE + CI}_{(3)+(5)} \\
\iff \qquad BD + BG &= CF + CH.
\end{aligned}
$$

Tämän lisäksi $\underbrace{BD + BG}_{(2)+(4)} = BF + BH$, jolloin saadaan

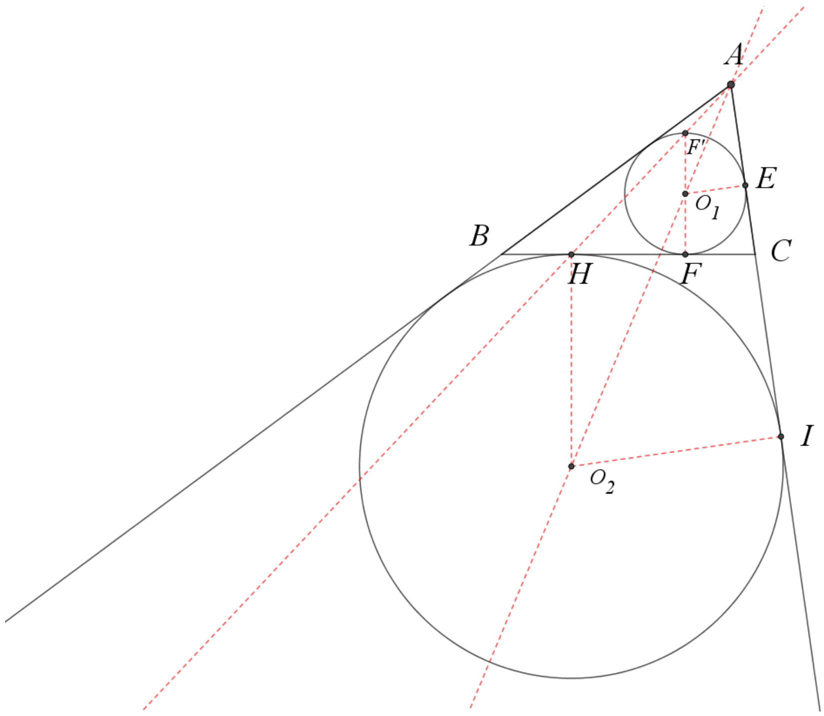
$$
\begin{aligned}
CF + CH &= BF + BH \\
\iff CF + CF + HF &= BH + HF + BH \\
\iff \qquad 2CF &= 2BH \\
\iff \qquad CF &= BH.
\end{aligned}
$$

Koska M on sivun BC keskipiste, niin $BM = MC$. Tästä seuraa

$$BM - BH = MC - CF \quad \iff \quad HM = MF.$$

Näin ollen sivu BC ja sen sisäympyrä ja vastavat vierusympyrän sivuamispisteet ovat symmetrisiä sen keskipisteen suhteen. Samalla tavalla väite pätee myös sivuilla AB ja AC. Täten Lemma 1 on todistettu. □

Lemma 2. *Kolmiossa $\triangle ABC$ piste F on sisäympyrän O_1 ja sivun BC sivuamispiste. Piste F' on pisteen F antipodipiste, joka sijaitsee ympyrän toisella puolella katsottaessa ajostain ympyrän kehän pisteestä F halkaisijaa pitkin. Piste H on vierusympyrän O_2 ja* *sivun BC sivuamispiste. Tällöin pisteet A, F' ja H ovat samalla suoralla (Kuva 46).*



Kuva 46

Todistus. Olkoot pisteet E ja I sivun AC tai sen jatkeen ja ympyröiden O_1, O_2 sivuamispisteet. Muodostetaan janat FO_1F', O_1E, O_2I, O_2H, AF' ja AH (Kuva 46).

Koska sisäympyrän keskipiste on samalla kolmion kulmanpuolittajien leikkauspiste, ja vierusympyrän keskipiste sijaitsee kolmion vastaisen kulman kulmanpuolittajalla, niin saadaan että

(1) pisteet A, O_1 ja O_2 ovat samalla suoralla (eli kulman $\angle BAC$ puolittajalla), joten $\angle O_1AE$ ja $\angle O_2AI$ ovat sama kulma;

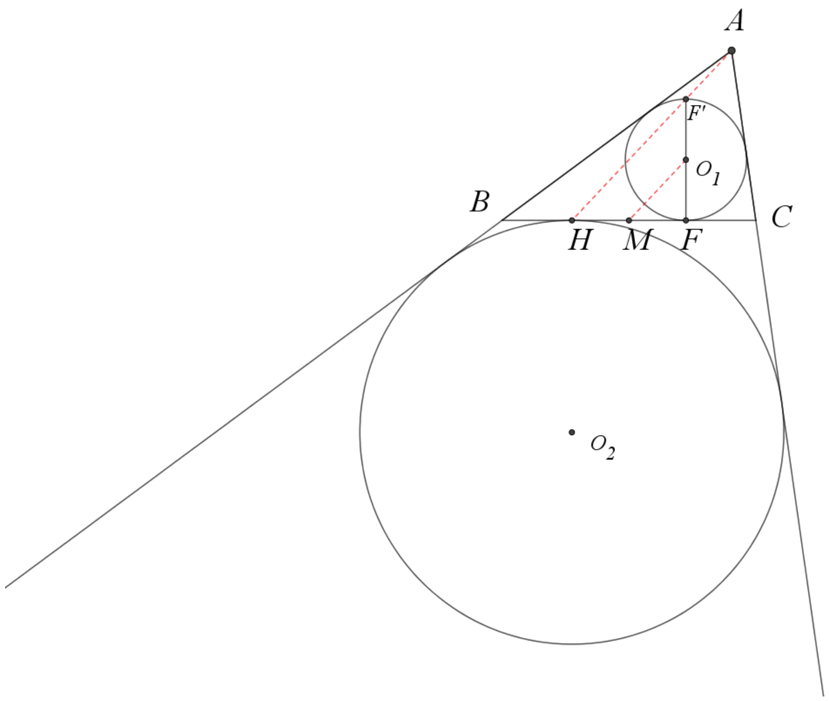
(2) $O_1E \perp AC$ ja $O_2I \perp AC$, jolloin $\angle AEO_1 = \angle AIO_2 = 90°$;

(3) Saadaan myös $O_1E \parallel O_2I$, joten $\angle EO_1A = \angle IO_2A$.

Tällöin kolmiot $\triangle AO_1E$ ja $\triangle AO_2I$ ovat yhdenmuotoiset (tunnetaan kolme kulmaa), joten $\dfrac{AO_1}{AO_2} = \dfrac{O_1E}{O_2I}$. Koska $O_1E = O_1F'$ (ympyrän O_1 säteet), ja $O_2I = O_2H$ (ympyrän O_2 säteet), niin täten $\dfrac{AO_1}{AO_2} = \dfrac{O_1F'}{O_2H}$. Koska $FF' \perp BC$ ja $O_2H \perp BC$, niin saadaan $FF' \,//\, O_2H$, joten $\angle AO_1F' = \angle AO_2H$. Tällöin kolmiot $\triangle AO_1F'$ ja $\triangle AO_2H$ ovat yhdenmuotoiset (tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma).

Tästä seuraa, että sivut AO_1 ja AO_2 ovat samalla suoralla, sekä että $O_1F' \,//\, O_2H$, joten $AF' \,//\, AH$. Koska sivuilla AF' ja AH on yhteinen piste A, joten ne ovat samalla suoralla. Näin ollen pisteet A, F' ja H ovat samalla suoralla. □

Lemma 3. *Kolmiossa $\triangle ABC$ piste M on sivun BC keskipiste. Piste F on sisäympyrän O_1 ja sivun BC sivuamispiste. Piste F' on pisteen F antipodipiste. Piste H on vierusympyrän O_2 ja sivun BC sivuamispiste. Tällöin $AH \,//\, O_1M$ (Kuva 47).*

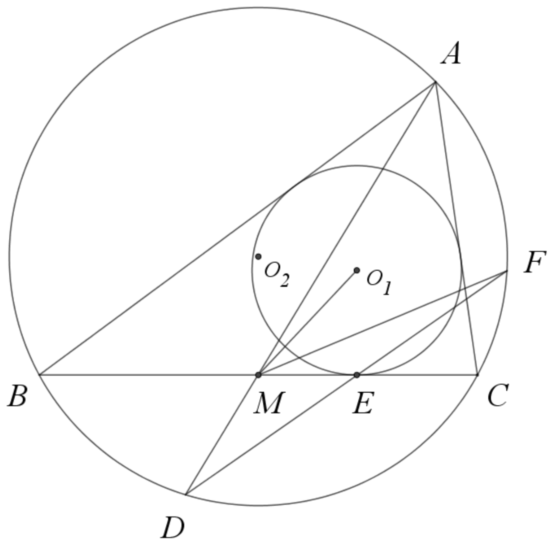


Kuva 47

Todistus. Lemman 1 todistuksen mukaan $HM = MF$, eli $HF = HM + MF = 2MF$. Lemman 2 todistuksen mukaan pisteet A, F' ja H ovat samalla suoralla. Lisäksi kulmat $\angle O_1FM$ ja $\angle F'FH$ ovat sama kulma ja $F'F = 2O_1F$. Tällöin kolmiot $\triangle F'HF$ ja $\triangle O_1MF$ ovat yhdenmuotoiset (tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma), joten $\angle FHF' = \angle FMO_1$, jolloin saadaan $F'H \parallel O_1M$ ja siitä seuraten $AH \parallel O_1M$. □

Seuraavaksi tutkitaan esimerkkiä perhoslauseesta ja lemmojen 1–3 yhteisestä käytöstä.

Esimerkki 6. Ympyrät O_1 ja O_2 ovat kolmion $\triangle ABC$ sisä- ja ulkoympyrä. Piste M on sivun BC keskipiste ja suora AM leikkaa kolmion ulkoympyrän O_2 pisteessä D. Piste E on janan BC ja sisäympyrän O_1 sivuamispiste ja suora DE leikkaa kolmion ulkoympyrän O_2 pisteessä F. Osoita, että $\angle FDA = FMO_1$ (Kuva 48).



Kuva 48

Pohdinta: Tehtävän kuvasta 48 löytyy

(1) ympyrä O_2;

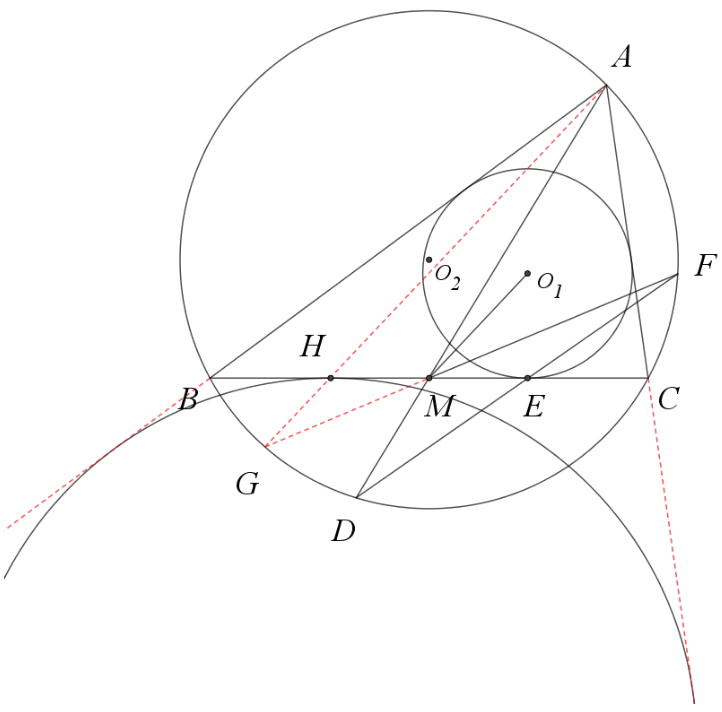
(2) jänne BC, jonka keskipiste on M;

(3) jänne AD, joka kulkee pisteen M kautta;

(4) jana FM, joka kulkee myös pisteen M kautta.

Tässä siis on melkein kaikki perhoslauseen tärkeät elementit. Lisäksi kuvasta 48 löytyy myös sisäympyrä O_1 ja sivuamispiste E. Nämä muistuttavat meitä heti ulkoympyrästä ja useista lemmoista.

Todistus. Laajennetaan jana FM, joka leikkaa ympyrän O_2 pisteessä G. Muodostetaan jana AG, joka leikkaa jänteen BC pisteessä H (Kuva 49). Tästä seuraa, että ympyrässä O_2 piste M on jänteen BC keskipiste ja AD ja FG ovat pisteen M kautta piirretävät jänteet. Jänne AG leikkaa jänteen BC pisteessä H ja jänne FD leikkaa jänteen BC pisteessä E. Perhoslauseen mukaan $HM = ME$.



Kuva 49

Lemman 1 mukaan kolmion sivu BC ja sen sisäympyrän ja sitä vastavan vierusympyrän sivuamispisteet ovat symmetrisiä janan BC keskipisteen suhteen. Koska $HM = ME$, piste M on kolmion sivun BC keskipiste ja piste E on sivun BC ja sisäympyrän sivuamispiste, joten piste H on sivun BC ja sen vierusympyrän sivuamispiste.

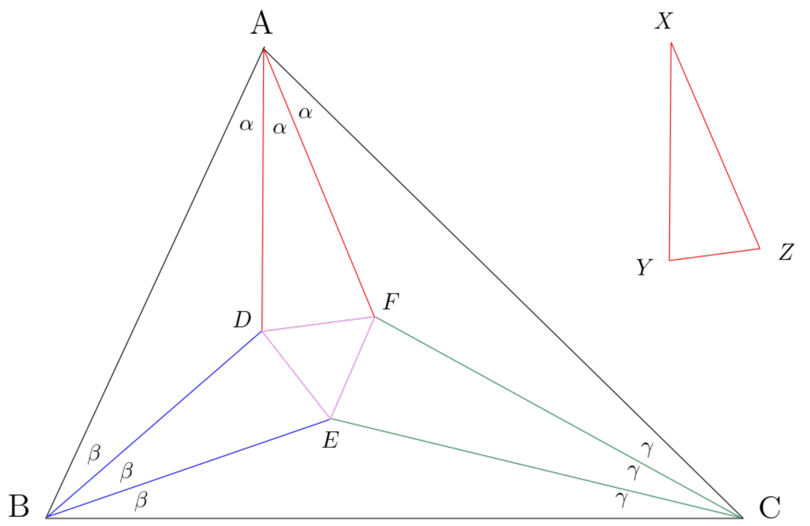
Lemman 3 mukaan saadaan $AH \mathbin{//} O_1M$, joten $\angle FMO_1 = \angle FGA$. Lisäksi kulmat $\angle FDA$ ja $\angle FGA$ ovat samaa kaarta vastaavat ympyrän kehäkulmat, eli ne ovat yhtä suuret. Täten saadaan, että $\angle FDA = \angle FGA = \angle FMO_1$. $\square$

5 Morleyn lause

Morleyn lauseen löysi vuonna 1899 englantilainen matemaatikko Frank Morley (1860 – 1937). Hän meni Englannista Yhdysvaltoihin opettamaan Haverford Collegeen vuonna 1887. Hän oli *American Journal of Mathematics*-lehden toimittaja vuosina 1900—1921. Hän toimi myös *American Mathematical Society*:n presidenttinä vuosina 1919—1920 [20]. Vuonna 1900 hänen artikkelinsa "*On the Metric Geometry of the Plane n-line*"ilmestyi American Mathematical Society Translationissa. Tässä artikkelissa hän esitteli Morleyn lauseen. Monet matemaatikot ja matematiikan harrastajat tutkivat sitä ja tuottivat siitä monia erilaisia todistusmenetelmiä. Mielenkiintoinen asia oli, että Morley ei ollut koskaan julkaissut omaa todistustaan missään painotuotteessa [19]. Esitän gradussani tästä kaksi todistusta. Ne koostuvat vain lukion tasogeometrian tiedoista.

Morleyn lause: Kolmion kulmat kolmeen yhtäsuureen osaan jakavien janojen leikkauspisteet muodostavat tasasivuisen kolmion.

5.1 Leo Giugiucin todistus



Kuva 50

Todistus. Todistus perustuu cut-the-knot - sivuston Leo Giugiucin todistukseen [22]. Kolmiossa $\triangle ABC$ olkoot kulma $\angle BAC = 3\alpha$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3}\right)$, kulma $\angle CBA = 3\beta$ $\left(0 < \beta < \frac{\pi}{3}\right)$ ja kulma $\angle ACB = 3\gamma$ $(0 < \gamma < \frac{\pi}{3})$. Tällöin $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$ (Kuva 50).

Sinilauseen avulla kolmiosta $\triangle AFC$ saadaan $\dfrac{AF}{\sin \angle ACF} = \dfrac{AC}{\sin \angle CFA}$.

Kolmiosta $\triangle ABC$ huomataan

$$\frac{AC}{\sin \angle CBA} = 2r \quad \Longleftrightarrow \quad AC = 2r \sin \angle CBA,$$

missä r on kolmion $\triangle ABC$ ulkoympyrän säde. Tällöin saadaan

$$\begin{aligned}
\frac{AF}{\sin\angle ACF} &= \frac{AC}{\sin\angle CFA} \\
\frac{AF}{\sin\gamma} &= \frac{2r\sin\angle CBA}{\sin\left(\pi-(\alpha+\gamma)\right)} && |\sin(\pi-x)=\sin x \\
&= \frac{2r\sin 3\beta}{\sin\left(\alpha+\gamma\right)} && |\text{Kolminkertaisen kulman kaava A.3} \\
&= \frac{2r\left(4\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\beta\right)} \\
&= 8r\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right).
\end{aligned}$$

Eli $AF = 8r\sin\beta\sin\left(\frac{\pi}{3}+\beta\right)\sin\gamma$. Samalla tavalla saadaan $AB = 2r\sin\angle ACB$ ja

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{\sin\angle DBA} &= \frac{AB}{\sin\angle ADB} \\
\frac{AD}{\sin\beta} &= \frac{2r\sin\angle ACB}{\sin\left(\pi-(\alpha+\beta)\right)} \\
&= \frac{2r\sin 3\gamma}{\sin\left(\alpha+\beta\right)} \\
&= \frac{2r\left(4\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right)\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\gamma\right)} \\
&= 8r\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right).
\end{aligned}$$

Eli $AD = 8r\sin\gamma\sin\left(\frac{\pi}{3}+\gamma\right)\sin\beta$.

Koska $\dfrac{\angle BAC}{3}$, $\dfrac{\pi + \angle CBA}{3}$, ja $\dfrac{\pi + \angle ACB}{3}$ ovat positiivisia, lisäksi

$$\frac{\angle BAC}{3} + \frac{\pi + \angle CBA}{3} + \frac{\pi + \angle ACB}{3} = \pi,$$

niin on olemassa sellainen kolmio $\triangle XYZ$, että

$$\begin{aligned}
\angle YXZ &= \frac{\angle BAC}{3} = \alpha, & \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3}\right)\\
\angle ZYX &= \frac{\pi + \angle CBA}{3} = \frac{\pi}{3} + \beta, & \left(0 < \beta < \frac{\pi}{3}\right)\\
\angle XZY &= \frac{\pi + \angle ACB}{3} = \frac{\pi}{3} + \gamma, & \left(0 < \gamma < \frac{\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

jonka ulkoympyrän säde on $\dfrac{1}{2}$ (Kuva 50). Tällöin, sinilauseen korollaarin (Korollaari 1) mukaan,

$$\begin{aligned}
\frac{YZ}{\sin \angle YXZ} = 2 \cdot r \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{YZ}{\sin \alpha} = 2 \cdot \frac{1}{2} \quad &&\Longleftrightarrow \quad YZ = \sin \alpha,\\
\frac{XZ}{\sin \angle ZYX} = 2 \cdot r \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{XZ}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \quad &&\Longleftrightarrow \quad XZ = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \beta\right),\\
\frac{XY}{\sin \angle XZY} = 2 \cdot r \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{XY}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)} = 2 \cdot \frac{1}{2} \quad &&\Longleftrightarrow \quad XY = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right).
\end{aligned}$$

Tästä seuraa

$$\frac{AD}{XY} = \frac{8r \sin \gamma \sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right) \sin \beta}{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \gamma\right)} = 8r \sin \beta \sin \gamma$$

ja

$$\frac{AF}{XZ} = \frac{8r\sin\beta\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)\sin\gamma}{\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\beta\right)} = 8r\sin\beta\sin\gamma.$$

Eli $\dfrac{AD}{XY} = \dfrac{AF}{XZ}$, lisäksi $\angle DAF = \angle YXZ = \alpha$. Tällöin kolmiot $\triangle ADF$ ja $\triangle XYZ$ ovat yhdenmuotoisia (tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma).
Tällöin $\dfrac{DF}{YZ} = 8r\sin\beta\sin\gamma$, josta saadaan että $DF = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.
Samalla tavalla saadaan $DE = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ ja $EF = 8r\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, eli

$DF = DE = EF$. Näin ollen kolmio $\triangle DEF$ on tasasivuinen kolmio. $\square$

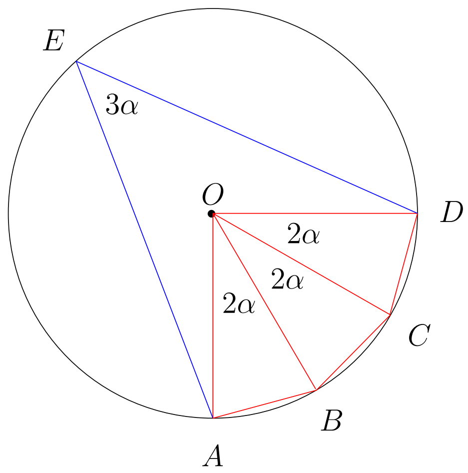
5.2 M. T. Naraniengarin todistus

Tämä on yksi varhaisimmista Morleyn lauseen todistuksista ja perustuu cut-the-knot -sivuston todistukseen M.T. Naraniengarin todistuksesta [23].

Ensin hän muodostaa tasasivuisen kolmion $\triangle XYZ$ kolmion $\triangle ABC$ sisään. Tämän jälkeen hän osoittaa, että kolmion $\triangle XYZ$ kolme kärkeä ovat kolmion $\triangle ABC$ kulmat kolmeen yhtäsuureen osaan jakavien janojen leikkauspisteet. Tämä todistaa, että kolmion kulmat kolmeen yhtäsuureen osaan jakavien janojen leikkauspisteet muodostavat tasasivuisen kolmion.

Hänen todistusmenetelmässään käytettiin lähinnä kehäkulmalausetta. Todistuksen helpottamiseksi hän esitti myös lemman kehäkulmalauseen perusteella. Tämän lemman tarkoituksena on todistaa, että viisi tiettyjen ehtojen täyttävää pistettä on saman ympyrän kehällä. Esitellään ensin tämä lemma ja sitten hänen menetelmänsä ja todistusprosessi.

Tutkitaan ensin kehäkulmalausetta (Lause 5).



Kuva 51

Kuvasta 51 nähdään, että ympyrän keskipiste on O ja säde on r ($r > 0$), tällöin $OA = OD = r$. Kehäkulmalauseen mukaan saadaan $\angle AED = \dfrac{\angle AOD}{2}$.

Tutkitaan nyt kehäkulmalauseen käänteistä tulosta. Olkoon ympyrän O kehällä on kaksi pistettä A ja D. Olkoon piste E, joka ei ole kaarella $\overset{\frown}{AD}$ ja on kaaren vastakkaisella puolella. Jos pisteille voidaan muodostaa kehäkulmalauseen yhtäpitävyys $\angle AED = \dfrac{\angle AOD}{2}$ $(0 < \angle AOD < 2\pi)$, niin kolme pistettä A, D, ja E ovat saman ympyrän O kehällä (Kuva 51).

Todistuksen seuravassa vaiheessa M.T. Naraniengar jakoi keskuskulman $\angle AOD$ tasan kolmeen osaan $\angle AOB, \angle BOC$ ja $\angle COD$. Olkoon keskuskulma $\angle AOD = 6\alpha$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}, \quad \text{sillä} \quad 0 < \angle AOD < 2\pi\right)$, jolloin kehäkulmalauseen mukaan

$$\angle AED = \frac{6\alpha}{2} = 3\alpha \quad \text{(Kuva 51).}$$

Todistuksessa pyritään selivittämään milloin pisteet A, B, C ja D ovat saman ympyrän kehällä. Käytetään edellä ollutta päättelyä, jonka mukaan kolme pistettä ovat saman ympyrän kehällä. Tämä jälkeen voidaan todistaa, että viisi pistettä A, B, C, D, ja E ovat saman ympyrän kehällä. Hän myös tarkoituksellisesti muokkasi seuraavia ehtoja sopivimpaan muotoon Morleyn lauseen todistamiseksi.

Olkoon $\angle AOD = 6\alpha$, jolloin $\angle AED = 3\alpha$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}\right)$. Olkoot pisteet B ja C kaarella $\overset{\frown}{AD}$, ja kaaret $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CD}$, tällöin lauseen 7 nojalla saadaan

$$\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \frac{6\alpha}{3} = 2\alpha \quad \text{(Kuva 51)}.$$

Koska $OA = OB = OC = OD = r$, jolloin kolmiot $\triangle AOB, \triangle BOC$ ja $\triangle COD$ ovat tasakylkisiä kolmioita. Tämän lisäksi $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = 2\alpha$, niin ne ovat myös yhteneviä (tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma).

Tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat samansuuruisia. Tästä seuraa yhtenevyyden perusteella

$$\angle BAO = \angle OBA = \angle CBO = \angle OCB = \angle DCO = \angle ODC = \frac{\pi - 2\alpha}{2},$$

missä π on kolmion kolmen kulman summa, jolloin

$$\color{blue}{\angle CBA} = \angle OBA + \angle CBO = \angle OCB + \angle DCO = \color{red}{\angle DCB} = \frac{\pi - 2\alpha}{2} + \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \pi - 2\alpha.$$

Koska $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}$, niin $\pi - 2\alpha > \dfrac{\pi}{3}$.

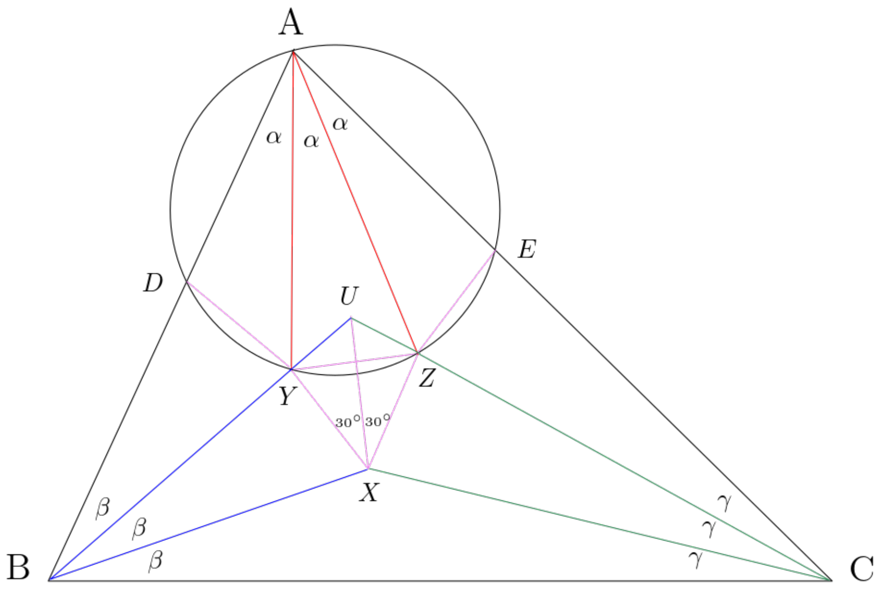
Tällöin edellisten päättelyjen pohjalta voidaan muotoilla seuraava lemma:

Lemma 4. *Jos neljä pistettä A, B, C ja D täyttävät ehdot*

(1) $AB = BC = CD$ *ja*
(2) $\angle CBA = \angle DCB = \pi - 2\alpha > \dfrac{\pi}{3} \quad \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}\right)$,

niin ne ovat saman ympyrän kehällä. Olkoon mikä tahansa piste E, joka ei ole kaarella $\overset{\frown}{ABCD}$ ja on kaaren vastakkaisella puollella, voidaan muodostaa, että kulma $\angle AED = 3\alpha$, niin piste E on myös tämän ympyrän kehällä (Kuva 51).

Tutkitaan nyt Morleyn lausetta.



Kuva 52

Menetelmä: Yksinkertaisesti sanottuna hänen ideansa on muodostaa yksi tasasivuinen kolmio $\triangle XYZ$ kolmion $\triangle ABC$ sisälle, ja tämän jälkeen todistaa, että kolmion $\triangle XYZ$ kolme kärkeä ovat kolmion $\triangle ABC$ kulmat kolmeen yhtäsuureen osaan jakavien janojen leikkauspisteet.

Todistus. Olkoot kulmat $\angle CBA = 3\beta$ $\left(0 < \beta < \dfrac{\pi}{3}\right)$ ja $\angle ACB = 3\gamma$ $\left(0 < \gamma < \dfrac{\pi}{3}\right)$, ja niiden kulmat kolmeen yhtäsuureen osaan jakavien janojen leikkauspisteet ovat U ja X (Kuva 52).

Kolmiossa $\triangle UBC$ jana BX on kulman $\angle CBU$ kulmanpuolittaja, jana CX on kulman $\angle UCB$ kulmanpuolittaja, joten X on kolmion $\triangle UBC$ kulmanpuolittajien leikkauspiste. Tällöin jana UX on myös kulman $\angle BUC$ kulmanpuolittaja.

Konstruoidaan pisteet Y janalla BU ja piste Z janalla CU, siten että $\angle UXY = \angle ZXU = \dfrac{\pi}{6}$. Tällöin kolmiot $\triangle UXY$ ja $\triangle UXZ$ ovat yhteneviä (tunnetaan kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu: $\angle UXY = \angle ZXU$, yhteinen jana UX, $\angle YUX = \angle XUZ$). Nyt jana $XY = XZ$ ja kolmio $\triangle XYZ$ on tasakylkinen kolmio. Koska kulma $\angle ZXY = \dfrac{\pi}{3}$, niin

$$\angle XYZ = \angle YZX = \frac{\pi - \frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

eli kolmio $\triangle XYZ$ on tasasivuinen kolmio.

Lisäksi koska kolmiot $\triangle UXY$ ja $\triangle UXZ$ ovat yhteneviä, niin jana $UY = UZ$ ja $\triangle UYZ$ on tasakylkinen kolmio, joten $\angle ZYU = \angle UZY$. Koska kaikkien kolmioiden kulmien summa on sama, eli kolmioissa $\triangle UYZ$ pätee $\angle YUZ + \angle ZYU + \angle UZY = \pi$, ja kolmioissa $\triangle UBC$ pätee $\angle BUC + \angle CBU + \angle UCB = \pi$. Lisäksi kulmat $\angle YUZ$ ja $\angle BUC$ ovat sama kulma, joten $\angle ZYU + \angle UZY = \angle CBU + \angle UCB = 2\beta + 2\gamma$, saadaan

$$\angle ZYU = \angle UZY = \frac{2\beta + 2\gamma}{2} = \beta + \gamma.$$

Olkoon kulma $\angle BAC = 3\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}\right)$. Tällöin kolmiossa $\triangle ABC$ kulmien summa on $\angle BAC + \angle CBA + \angle ACB = 3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi$, eli $\alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{3}$, ja saadaan

$$\beta + \gamma = \frac{\pi}{3} - \alpha.$$

Tällöin

$$\angle ZYU = \frac{\pi}{3} - \alpha \quad \text{ja} \quad \angle XYU = \angle ZYU + \angle XYZ = \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} - \alpha.$$

Tämän johdosta merkitään piste D janalle AB ja piste E janalle AC siten että jana $BD = BX$ ja $CE = CX$. Tällöin kolmiot $\triangle BYD$ ja $\triangle BYX$ ovat yhteneviä (tunnetaan kaksi sivua ja niiden välinen kulma: $BD = BX$, $\angle YBD = \angle XBY$, kolmioilla yhteinen sivu BY). Samalla tavalla päätellään, että kolmiot $\triangle CZX$ ja $\triangle CZE$ ovat myös yhteneviä.

Tällöin saadaan jana $DY = YX = XZ = YZ = ZE$, ja kulmat $\angle DYB = \angle BYX$, $\angle XZC = \angle CZE$.
Tästä seuraa

$$\begin{aligned}
\angle ZYD &= \angle UYD + \angle ZYU \\
&= (\pi - \angle DYB) + \angle ZYU \\
&= (\pi - \angle BYX) + \angle ZYU \\
&= \angle XYU + \angle ZYU \\
&= \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \\
&= \pi - 2\alpha.
\end{aligned}$$

Samalla tavalla saadaan

$$\begin{aligned}
\angle EZY &= \angle EZU + \angle UZY \\
&= (\pi - \angle CZE) + \angle UZY \\
&= (\pi - \angle XZC) + \angle UZY \\
&= \angle UZX + \angle UZY \\
&= \left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) + \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \\
&= \pi - 2\alpha.
\end{aligned}$$

Eli $\angle ZYD = \angle EZY = \pi - 2\alpha$. Koska $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$, niin $\pi - 2\alpha > \frac{\pi}{3}$, joten edelleen lemman 4 mukaan neljä pistettä D, Y, Z ja E täyttävät ehdot

(1) $DY = YZ = ZE$ ja
(2) $\angle ZYD = \angle EZY = \pi - 2\alpha > \frac{\pi}{3} \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{3}\right)$,

niin nämä neljä pistettä ovat saman ympyrän kehällä. Koska kaaret $\overset{\frown}{DY} = \overset{\frown}{YZ} = \overset{\frown}{ZE}$, niin lauseen 6 mukaan kehän kulmille pätee $\angle DAY = \angle YAZ = \angle ZAE = \alpha$, eli $\angle DAE = 3\alpha$. Tällöin piste A ja pisteet D, Y, Z, E ovat saman ympyrän kehällä (Kuva 52).

Koska janat AY ja AZ jakavat kulman $\angle DAE$ kolmeen samansuuruiseen osaan, ja lisäksi $\angle DAE$ ja $\angle BAC$ ovat sama kulma, mikä tarkoittaa, että janat AY ja AZ jakavat kulman $\angle BAC$ kolmeen samansuuruiseen osaan. Toisin sanoen pisteet X, Y ja Z, joiden avulla rakennetaan tasasivuinen kolmio, ovat itse asiassa kolmion $\triangle ABC$ kulmat kolmeen yhtäsuureen osaan jakavien janojen leikkauspisteet. $\square$

Ihmiskunta on aina ollut erittäin kiinnostunut matematiikasta. Pitkän aikavälin matemaattisen kehityksen jälkeen, matematiikan perustiedon osuus on melkein täydellinen, ja tämän vuoksi on vaikea saada enää teknisiä läpimurtoja. Mutta yksi matematiikan mielenkiintoinen osa on, että monilla tehtävillä voi olla useita ratkaisuja. Graduni suurin arvo on tarjota lukijoille erilaisia ja konkreettisia tehtäviin liittyviä ajatteluprosesseja. Toivon, että nämä menetelmat ja ideat voivat auttaa lukijoita ratkaisemaan joitakin haastavia geometrisia ongelmia. Toivon myös, että graduni voi herättää lukijoiden kiinnostuksen geometriaa kohtaan.

Viitteet

[1] Lukion opetussuummitelman perusteet 2019. Opetushallitus. PunaMusta Oy, Helsinki 2019.

[2] Geometria, pitkä matematiikka, WSOY, 1995.

[3] Pyramidi 3, Geometria, Tammi, 2005.

[4] Pyramidi 9, Trigonometriset funktiot ja lukujonot, Tammi, 2007.

[5] Geometria, K.Väisälä, Viides painos, Werner Söderström osakeyhtiö, Porvoo, 1959.

[6] Geometrian perusteita, Matti Lehtinen, Oulu, 2016.

[7] Apollonioksen unohtunut ympyrä, Matti Lehtinen, Solmu 3/2010. `https://matematiikkalehtisolmu.fi/2010/3/apollonios.pdf`

[8] Joutsenlahti, J, Silfverberg, H. ja Räsänen, P. (Toim.), 2018. Matematiikan opetus ja oppiminen. Leppäaho, s. 368-392 Ongelmanratkaisun opettamisesta.

[9] The sector theorem attributed to Menelaus. Nathan Sidoli. Department of Materematics Simon Fraser University. 2006. SCIAMVS 7.

[10] Cevan lause, `http://www.cut-the-knot.org/Generalization/ceva.shtml`

[11] Cevan lause, `https://mathworld.wolfram.com/CevasTheorem.html`

[12] William Wallace's 1803 Statement of the Butterfly Theorem,`https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/WallaceButterfly.shtml`

[13] A Better Butterfly Theorem, `https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/BetterButterfly.shtml`

[14] Some unknown documents associated with William Wallace (1768–1843),Alex D D Craik & John J O'Connor, 2011. BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, s.17-28 Volume 26, 2011-Issue 1.

[15] The Butterfly Theorem, https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Butterfly.shtml

[16] Butterfly with Menelaus, https://www.cut-the-knot.org/triangle/ButterflyWithMenelaus.shtml

[17] A generalization of the butterfly theorem from circles to conics, Zvonko ˇCerin. https://hrcak.srce.hr/file/1588

[18] Butterflies in Hyperbola, Sidney H. Kung https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ButterflyInHyperbola.shtml

[19] The Morley Trisector Theorem, Cletus O. Oakley & Justine C. Baker, The American Mathematical Monthly, 85:9, 737-745, DOI: 10.1080/00029890.1978.11994688.

[20] Cardioids and Morley's trisector theorem, Jan van de Craats and Jan Brinkhuis, 2017 https://staff.fnwi.uva.nl/j.vandecraats/naw5-2017-18-1-025.pdf

[21] Morley's Miracle, https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml

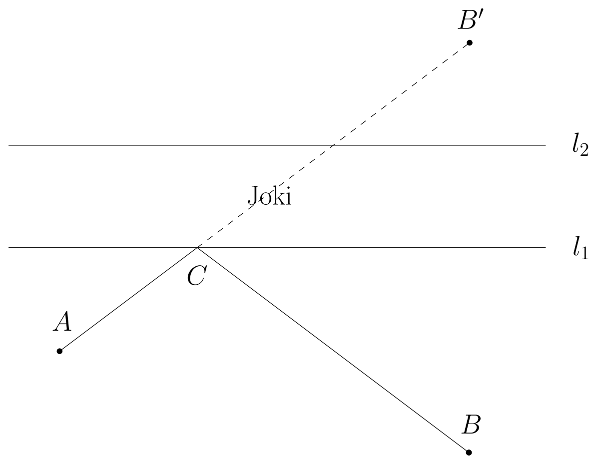
[22] Morley's Miracle, Leo Giugiuc's Proof, https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Giugiuc.shtml

[23] Morley's Miracle, M. T. Naraniengar's proof, https://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/Naraniengar.shtml

A Liitteet

A.1 Tehtävän 1 vastaus

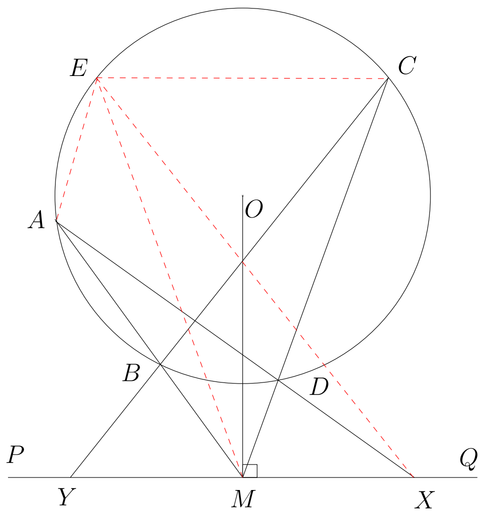
Ratkaisu: Olkoot joenrannat l_1 ja l_2. Piirretään pisteen B symmetriapiste B' l_1 symmetria-akselina. Piirretään pisteden A ja B' kautta jana, joka leikkaa l_1 pistessä C, ja yhdistää pisteet B ja C. Koska lyhin etäisyys kahden pisteen välillä on näiden pisteiden välinen jana, ja $BC = B'C$, joten $AC + BC$ on kaikista lyhin reitti.



Kuva 1: Vastaus

A.2 Korollaarin 3 todistus

Todistus. Piirretään pisteen C kautta jänne CE, joka leikkaa ympyrän pisteessä E ja $CE \,//\, PQ$. Piirretään janat AE, EM ja EX. (Kuva 40).



Kuva 40

Koska CE // PQ ja $OM \perp PQ$, joten $OM \perp CE$. Koska piste O on ympyrän keskipiste, joten suora OM on janan CE keskinormaali, tällöin kolmio $\triangle MCE$ on tasakylkinen kolmio, eli $MC = ME$ ja $\angle MEC = \angle ECM$. Lisäksi yhdensuuntaisuuden mukaan $\angle MEC = \angle EMY$ ja $\angle ECM = \angle XMC$. Tällöin saadaan $\angle EMY = \angle XMC$, ja täten

$$\angle CMY = \angle EMY + \angle CME = \angle XMC + \angle CME = \angle XME.$$

Koska CE // PQ, jolloin $\angle ECM + \angle CMY = 180°$. Lisäksi jännenelikulmiossa $AECD$ $\angle ECD + \angle DAE = 180°$ (jännenelikulmiossa vastakkaiset kulmat ovat supplemettikulmia). Koska $\angle ECD$ ja $\angle ECM$ ovat sama kulma, jolloin $\angle CMY = \angle DAE = \angle XAE$. Koska $\angle CMY = \angle XME$, niin täten $\angle XAE = \angle XME$. Eli sivun AE ja lävistäjän AX välinen kulma $\angle XAE$ on yhtä suuri kuin vastaisen sivun MX ja toisen lävistäjän EM välinen kulma $\angle XME$ viereisessä kulmassa. Tällöin saadaan nelikulmio $AEXM$, joka on jännenelikulmio.

Jännenelikulmiossa $AEXM$ kulmat $\angle MEX$ ja $\angle MAX$ ovat jännettä MX vastaavia kehäkulmia, jotka ovat samalla puolella jännettä, niin $\angle MEX = \angle MAX$. Samalla tavalla ympyrässä O kulmat $\angle BAD$ ja $\angle BCD$ ovat jännettä BD vastaavia kehäkulmia, jotka ovat samalla puolella jännettä, niin $\angle BAD = \angle BCD$. Tämän lisäksi $\angle BAD$ ja $\angle MAX$ ovat sama kulma, $\angle BCD$ ja $\angle YCM$ ovat sama kulma, tällöin saadaan että

$$\angle MEX = \angle MAX = \angle BAD = \angle BCD = \angle YCM.$$

Näistä kohdista seuraa, että kolmioissa $\triangle EMX$ ja $\triangle CMY$ pätee

$$\angle EMX = \angle CMY, \quad \angle MEX = \angle YCM \quad \text{ja} \quad ME = MC,$$

eli kolmion kaksi kulmaa ja niiden välinen sivu ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa. Täten kolmiot $\triangle EMX$ ja $\triangle CMY$ ovat yhtenevät, josta saadaan että

$$MX = MY.$$

□

A.3 Trigonometrian kaavoja

Olkoon α ja β kulmia,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1;$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha; \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha};$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha; \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha; \quad \tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha.$$

Puolikulmakaavoja:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Kaksinkertaisen kulman kaavoja:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

Kolminkertaisen kulman kaavoja:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = 4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right);$$

$$\cos 3\alpha = -3\cos\alpha + 4\cos^3\alpha = 4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right);$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha} = \tan\alpha\tan\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\tan\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

Yhteen- ja vähennyslaskukaavoja:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta};$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}.$$